الفصل الأول : مدخل في الرياضيات

1. مفهوم الحقل : في هذا الجزء من الفيزياء ندرس الظواهر الكهربائية التي يمكن أن نعبر عنها بواسطة حقول ناتجة عن الشحن الكهربائية ، فسوف نرى مثلا أن قوة التأثير بين شحنتين كهربائيتين ناتجة عن تفاعل إحدى الشحنتين مع الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة الأخرى. من أجل ذلك نود أن تكون لدينا منذ البداية ، معرفة ولو بسيطة بالطرق الرياضية المستعملة لوصف الحقول.

من وجهة نظر الرياضيات ، الحقل هو عبارة عن دالة تمثل مقدارا فيزيائيا في كل نقطة من الفضاء. في حالة الحقول السلمية ، يكون هذا المقدار الفيزيائي محددا تماما قيمة واحدة في كل نقطة من الفضاء مثل الكمون الكهربائي. بالنسبة للحقول الشعاعية ، يجب أن نعرف وفي كل نقطة من الفضاء وفي نفس الوقت شدة المقدار الفيزيائي واتجاهه.

مثال : الدالة :

$$V(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xy + 3yz^2 + 2xz$$

تمثل حقل سلمي .

$V(1,-2,3) = -21$ ، $V(1,1,1) = -39$

الدالة الشعاعية :

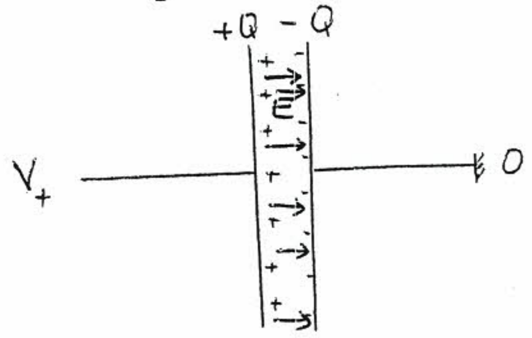
$$\vec{E}(x,y,z) = (x^2 + 2xy)\,\vec{i} + (y^2 + 2xz)\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$$

تمثل حقلا شعاعيا . $\vec{E}(1,1,1) = 3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

$\|\vec{E}(1,1,1)\| = \sqrt{19}$ ، $\vec{u}_1 = \dfrac{3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{19}}$

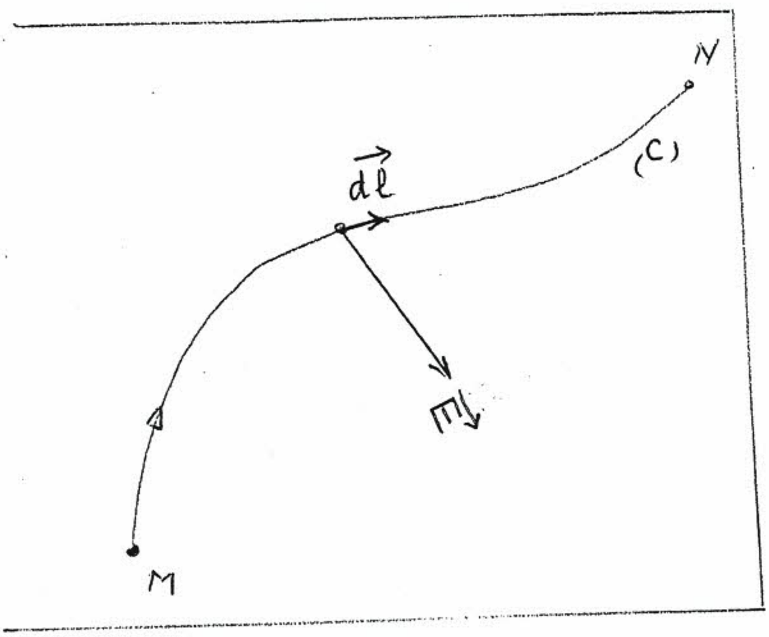
عندما تكون هذه المقادير لها نفس القيمة ونفس الإتجاه نقول بأن الحقل منتظم (Uniforme) . وعندما لا تتعلق القيمة بالزمن نقول بأن الحقل مستقر (Stationnaire) . مثال : الحقل الكهربائي بين طرفي مكثفة مشحونة منتظم.

مثال : الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بين طرفي مكثفة مشحونة هو حقل منتظم .



جولان حقل شعاعي :

نعتبر حقلا شعاعيا $\vec{E}$ ومسار (c) بين نقطتين M و N .



نعرف جولان الحقل $\vec{E}$ على المسار (c) بين M و N بالمقدار

$$\mathcal{E}_M^N = \int_{M,(C)}^{N} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

$\mathcal{E}_1$ يمثل التكامل المنحني للحقل $\vec{E}$ محسوب على طول المسار (c) بين النقطتين M و N .

توجد نوعان من الحقول الشعاعية :

* الحقل الشعاعي المحافظ : وهو الذي يكون جولانه لا يتعلق بالمسار (c) وإنما يتعلق فقط بالنقطة الإبتدائية ونقطة النهاية . نقول عن هذا الحقل أنه مشتق من كمون .
* الحقل الغير محافظ : عندما يكون جولان الحقل يتعلق بالمسار (c) نقول عنه أنه غير محافظ أو غير مشتق من كمون .

يمكن أن نبرهن بسهولة أن جولان حقل مشتق من كمون على مسار مغلق معدوم .

$$\oint_{(C)} \vec{E}\, \vec{dl} = 0$$

الكمون V المشتق من الحقل $\vec{E}$ معرف بالعلاقة:

$$d\mathcal{C} = -dV = \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

أو: $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$

إذن: $\mathcal{C}_M^N = V(M) - V(N)$

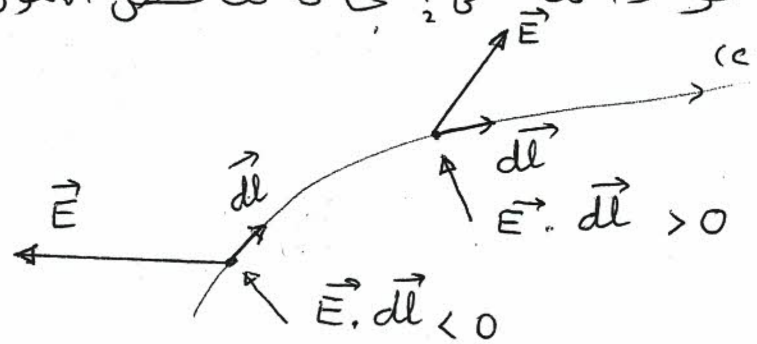
الكمون V يكون دائما معرفا بدلالة ثابت غير محدد والذي يهم عادة هو الفرق: $V(M) - V(N)$.

من العلاقة $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$، نلاحظ أنه

عندما يكون $dV > 0 \Leftarrow \vec{E}\cdot\vec{dl} < 0$ أي $\vec{E}$ معاكس لـ $\vec{dl}$

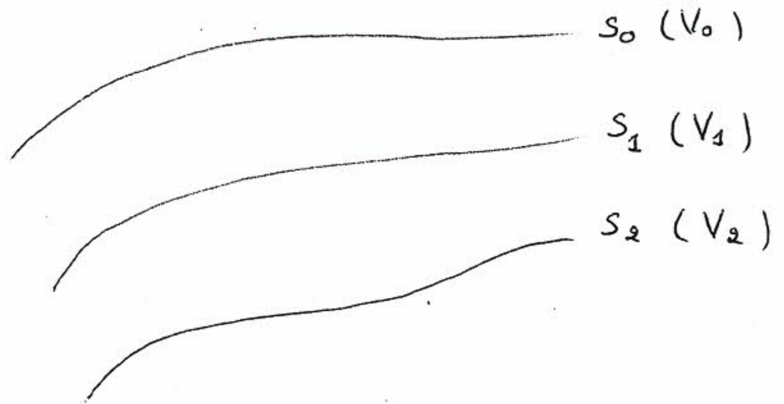
وعندما يكون $dV < 0 \Leftarrow \vec{E}\cdot\vec{dl} > 0$ أي $\vec{E}$ و $\vec{dl}$ في نفس الجهة ونستنتج أن:

« إتجاه الحقل $\vec{E}$ هو دائما في إتجاه تناقص الكمون V »



3- <u>السطوح المتساوية الكمون</u>: كل نقطة من الفضاء $M(x,y,z)$ ترفق بكمون قيمته $V(x,y,z)$. مجموع النقاط التي لها نفس الكمون تشكل سطحا يسمى السطح المتساوي الكمون.

السطح (S_0) الذي يوافق القيمة V_0 للكمون محدد بالمعادلة: $V(x,y,z) = V_0$.



« السطوح المتساوية الكمون لا تتقاطع أبدا فيما بينها. »

عند الانتقال على سطح متساوي الكمون ، مثلا (S_0) ، لدينا دائما : ثابتا = $V = V_0$. ومن تعريف الكمون نحصل على العلاقة :

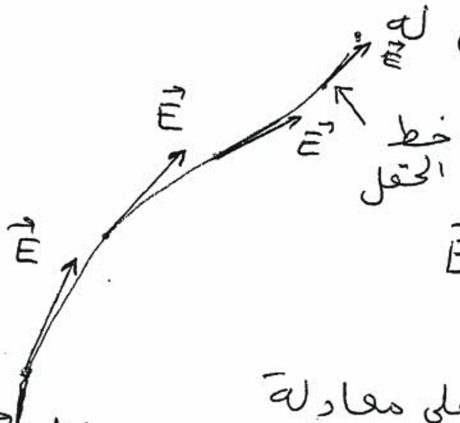
$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$ في أي نقطة من السطح (S_0) . وبما أن $\vec{dl} \neq \vec{0}$ و $\vec{E} \neq \vec{0}$ فإن ذلك تستلزم أن $\vec{E} \perp \vec{dl}$

ونخلص إلى القاعدة التالية :

« الحقل الشعاعي المشتق من كمون هو دائما عمودي السطوح المتساوية الكمون لهذا الكمون وفي اتجاه تناقص الكمون »

- <u>خطوط الحقل : أنبوبة الحقل</u> : خط الحقل هو عبارة عن منحنى يكون شعاع الحقل دائما مماسي له.

« خط الحقل يشير إلى كيفية تغير إتجاه الحقل »



في أي نقطة من خط الحقل لدينا : $\vec{E} \,//\, \vec{dl}$

إذن : $\vec{E} \wedge \vec{dl} = \vec{0}$.

• في جملة الإحداثيات الديكارتية نحصل على معادلة خط الحقل:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

لأن : $\vec{E}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ و $\vec{dl}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

في جملة الاحداثيات الأسطوانية : $\vec{E}\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix}$ و $\vec{dl}\begin{pmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{pmatrix}$

ونحصل على معادلة خط الحقل بالعلاقة :

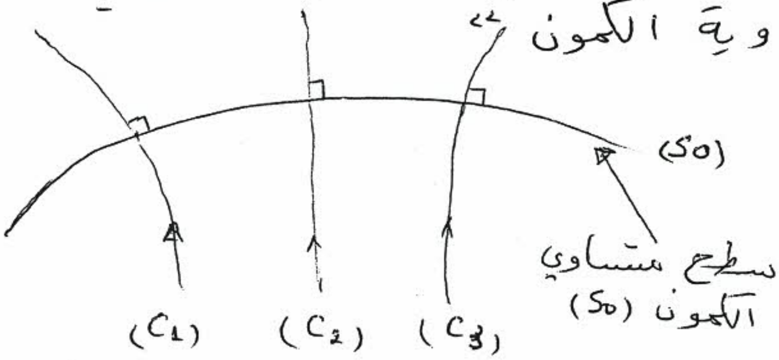
$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

في جملة الاحداثيات الكروية : $\vec{E}\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\varphi \end{pmatrix}$ ، $\vec{dl}\begin{pmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\varphi \end{pmatrix}$

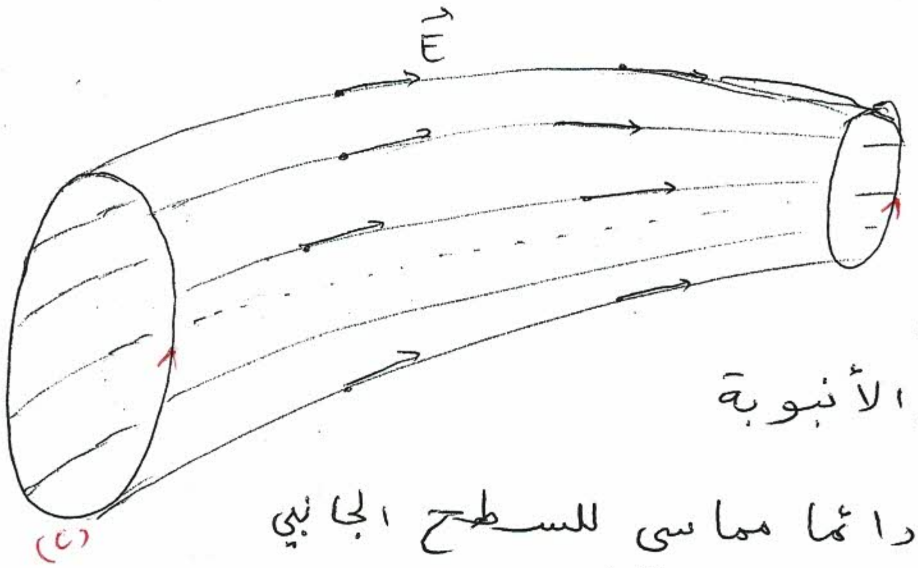
ومعادلات خط الحقل هي :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{E_\varphi}$$

" لا يمكن لخطوط الحقل أن تتقاطع فيما بينها وهي دائما عمودية على السطوح المتساوية الكمون "



خطوط الحقل التي ترتكز على مدار مغلق (C) تشكل ما يسمى بـ "انبوبة الحقل" (Tube de champ) .

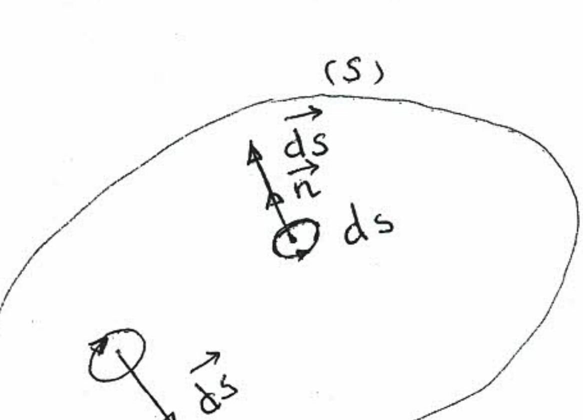


* الطاقة الناتجة عن الحقل والمارة عبر الأنبوبة محفوظة
* الحقل الشعاعي دائما مماسي للسطح الجانبي من الأنبوبة .

5 - تدفق حقل شعاعي :

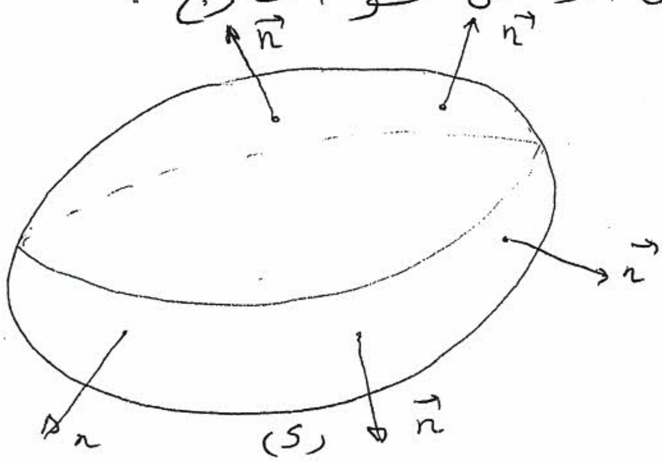
أ-1 - إتجاه مساحة عنصرية :

نعتبر مساحة (S) محددة بالمحيط (C) . نأخذ مساحة عنصرية ds من (S) . نعرف شعاع المساحة العنصرية $\vec{ds}$ المقدار : $\vec{ds} = ds \cdot \vec{n}$ حيث

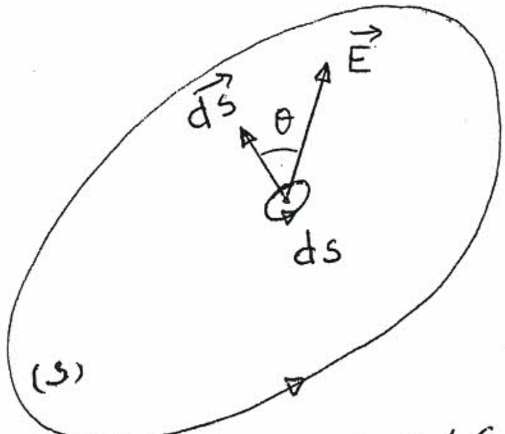


$\vec{n}$ هو شعاع الواحدة العمودي على ds . اتجاه ds يحدد وفقا للقاعدة المستعملة للحصول على معلم مباشر لما ندور على المحيط (C).

في حالة مساحة مغلقة (محيطها يشكل حجما)، فإن إتجاه
المساحة يكون دائما من الداخل نحو الخارج.



ب. تدفق حقل عبر مساحة موجهة:



ليكن الحقل الشعاعي $\vec{E}$ والمساحة العنصرية الموجهة $\vec{ds}$ من المساحة (S). نعرف التدفق العنصري $d\phi$ للحقل $\vec{E}$ عبر المساحة العنصرية $\vec{ds}$ بالمقدار:

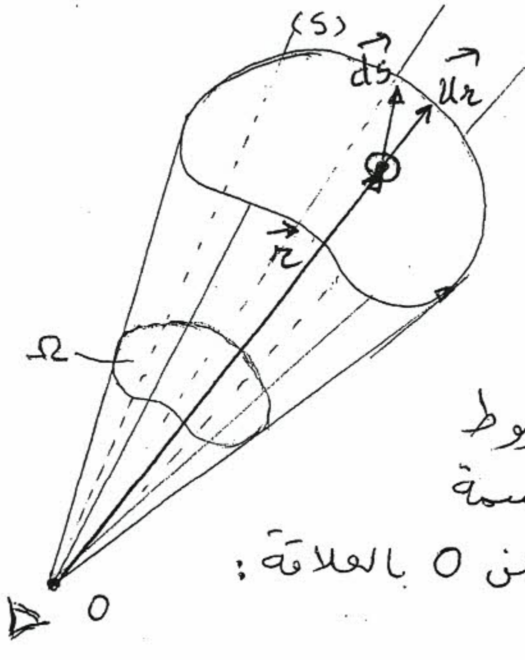
$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

$$d\phi = E \cdot ds \cdot \cos\theta .$$

التدفق $\phi(\vec{E})$ عبر المساحة الكلية (S) هو:

$$\phi(\vec{E}) = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

ج- الزاوية المجسمة:



ليكن مساحة كيفية (S) ونقطة O نرى من خلالها المساحة (S).

الخطوط التي تنطلق من O وترتكز على محيط المساحة (S) تشكل شبه مخروط بزاوية مجسمة Ω. نعرف الزاوية المجسمة Ω التي نرى من خلالها (S) إنطلاقا من O بالعلاقة:

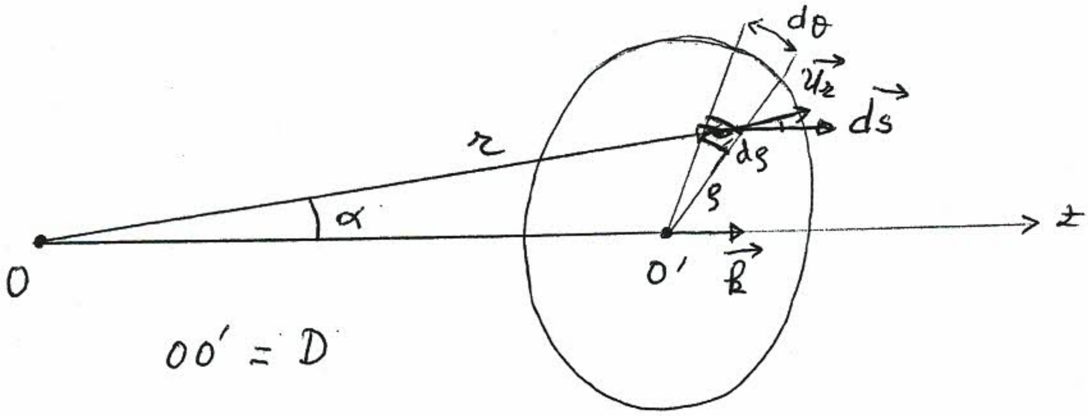
$$d\Omega = \frac{\vec{ds} \cdot \vec{n}}{r^2}$$

حيث $d\Omega$ هي الزاوية المجسمة العنصرية التي نرى من خلالها المساحة

العنصرية $\vec{ds}$ و $\vec{u_r}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec{r}$ الذي يربط بين O و $\vec{ds}$ و r طويلة $\vec{r}$ أي المسافة بين O و ds .

$$\Omega = \iint_{(S)} \frac{\vec{ds} \cdot \vec{u_r}}{r^2}$$

تطبيق : أحسب الزاوية المجسمة التي نرى من خلالها قرص نصف قطره R إنطلاقا من نقطة O توجد على محور القرص وتبعد بمسافة D عن مركزه O' .



لدينا :
$$d\Omega = \frac{\vec{ds} \cdot \vec{u_r}}{r^2}$$

* $\vec{ds} = ds \cdot \vec{k}$ ، لأن الاتجاه العمودي على القرص هو اتجاه محوره Oz أي $\vec{n} = \vec{k}$.

* $(\vec{ds}, \vec{u_r}) = \alpha$ * $ds = \rho \, d\rho \, d\theta$

* $r^2 = D^2 + \rho^2$ * $\cos\alpha = \frac{D}{r}$

إذن :
$$d\Omega = \frac{\rho \, d\rho \, d\theta \cos\alpha}{\rho^2 + D^2} = \frac{D \cdot \rho \, d\rho \, d\theta}{(\rho^2 + D^2)^{3/2}}$$

$$\Omega = \iint_{(S)} \frac{D \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta}{(\rho^2 + D^2)^{3/2}} = D \cdot \int_0^R \frac{\rho \, d\rho}{(\rho^2 + D^2)^{3/2}} \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

لحساب التكامل الأول يكفي أن نلاحظ أن مشتقة $\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + D^2}}$ بالنسبة لـ ρ هي : $-\rho / (\rho^2 + D^2)^{3/2}$

إذن :

$$\Omega = D \times \left[-\frac{1}{(\rho^2+D^2)^{1/2}} \right]_0^R \times \left[\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$\Omega = 2\pi . D \left[\frac{1}{D} - \frac{1}{(\rho^2+D^2)^{1/2}} \right] = 2\pi \left[1 - \frac{D}{(R^2+D^2)} \right.$$

$$\Omega = 2\pi \left[1 - \frac{D}{\sqrt{R^2+D^2}} \right]$$

الزاوية المجسمة التي نرى من خلالها نصف الفضاء نحصل عليها لما $R \to \infty$ أي : $\Omega = 2\pi$

والزاوية المجسمة التي نرى من خلالها كل الفضاء هي: $\Omega = 4\pi$

المؤثرات التفاضلية : لدراسة سلوك الحقول في الفضاء نستعمل عادة ما يسمى بالمؤثرات التفاضلية التي تسمح بإظهار خواص مميزة لهذه الحقول. المؤثرات المشهورة هي :

1 - التدرج (Gradient) : نعتبر دالة سلمية (حقل سلمي) $\varphi(x,y,z)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق. التدرج هو مؤثر تفاضلي يدخل على حقل سلمي ليعطي حقلا شعاعيا كما يلي :

$$\overrightarrow{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ، $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ، $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ هي المشتقات الجزئية للدالة φ بالنسبة لـ x و y و z على التوالي. لحساب $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ نشتق الدالة $\varphi(x,y,z)$ بالنسبة لـ x مع اعتبار y و z ثابتين.

* خواص التدرج :- $\overrightarrow{grad}\,\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\,\overrightarrow{grad}\,\varphi_1 + \varphi_1\,\overrightarrow{grad}\,\varphi_2$

. تفاضل الدالة φ يكتب :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

والانتقال العنصري $\vec{dl}$ في الاحداثيات الديكارتية :

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

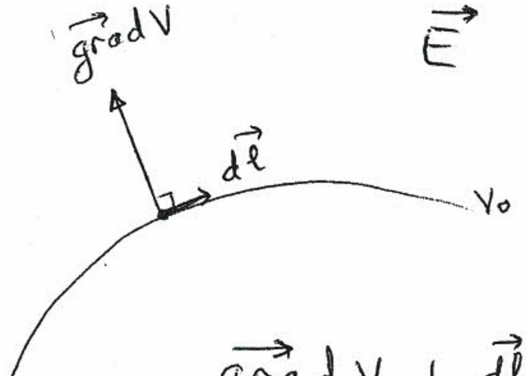
ويمكن أن نتأكد بسهولة أن : $\boxed{d\varphi = \overrightarrow{grad}\varphi \cdot \vec{dl}}$

هذه النتيجة عامة ولا تتعلق بجملة الاحداثيات المستعملة .

- عندما عرفنا الكمون V للحقل $\vec{E}$ أخذنا : $dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$

أي : $dV = \overrightarrow{grad}V\cdot\vec{dl} = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$

إذن : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

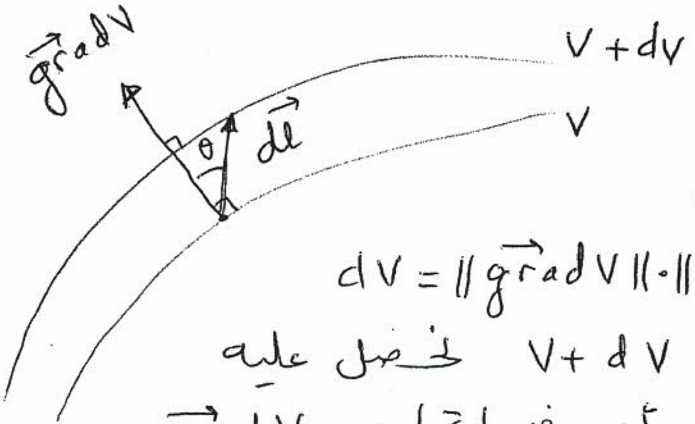


- ليكن السطح المتساوي الكمون V_0
عند الانتقال على السطح V_0 لدينا :

$$dV = \overrightarrow{grad}V\cdot\vec{dl} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{grad}V \perp \vec{dl}$$

إذن : $\overrightarrow{grad}V$ يشير إلى الاتجاه العمودي على السطح المتساوي الكمون للدالة V .

- نعتبر سطحين متساويي الكمون متقاربين V و V+dV



ننتقل من V إلى V+dV بانتقال عنصري $\vec{dl}$. لدينا :

$dV = \overrightarrow{grad}V\cdot\vec{dl}$ أو : $dV = \|\overrightarrow{grad}V\|\cdot\|\vec{dl}\|\cdot\cos\theta$

الانتقال الأقصر من V إلى V+dV نحصل عليه

لما : $\theta = 0$ $(\cos\theta = 1)$ أي في إتجاه $\overrightarrow{grad}V$.

إذن إتجاه $\overrightarrow{grad}V$ يشير إلى الاتجاه الأقصر للمرور من سطح متساوي الكمون إلى سطح آخر متساوي الكمون . وهذا يعني أن التدرج يشير إلى الاتجاه الذي تتغير معه الدالة بالسرعة القصوى بدلالة المسافة .

2 - التباعد (Divergence) :

هو مؤثر تفاضلي يدخل على حقل شعاعي ليعطي حقلا سلميا.

تباعد الحقل الشعاعي: $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ هو:

$$div \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

خواص التباعد:

* $div(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = div \vec{E}_1 + div \vec{E}_2$
* $div(f \cdot \vec{E}) = f \cdot div \vec{E} + \vec{E}\, \overrightarrow{grad} f$

نظرية قرين - أوستروغرادسكي (Geen - Ostrogradski) :

ليكن سطح مغلق (S) محيط في الفضاء بحجم V. وليكن $\vec{E}$ حقل شعاعي مستمرا وقابلا للإشتقاق على V.

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iiint_V div \vec{E} \cdot dv$$

عندما يكون V صغيرا جدا بحيث يصير $div \vec{E}$ لا يتغير بشكل معتبر داخل V (أي $div \vec{E}$ يصير ثابتا داخل V) فإننا نحصل على:

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{ds} = div \vec{E} \cdot V$$

ويمكن أن نكتب إذن: $div \vec{E} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{ds}$

إذن الإبتعاد هو التدفق على وحدة الحجم عبر مساحة تحيط الحجم يؤول إلى الصفر (حجم عنصري)

5- الدوراني (Rotationnel) :

هو مؤثر تفاضلي يدخل على حقل شعاعي ليعطي حقلا شعاعيا. ليكن: $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$.

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right).\vec{k}$$

خواص الدوراني: * $\overrightarrow{Rot}\,(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \overrightarrow{Rot}\,\vec{E}_1 + \overrightarrow{Rot}\,\vec{E}_2$

$$\overrightarrow{Rot}(f.\vec{E}) = f.\overrightarrow{Rot}\,\vec{E} + \overrightarrow{grad}\,f \wedge \vec{E}$$

عندما يكون الحقل الشعاعي مشتق من كمون V فإن $\overrightarrow{Rot}\,\vec{E}$ يكون معدوما، أي: $\overrightarrow{Rot}\,(\overrightarrow{grad}\,V) = \vec{0}$

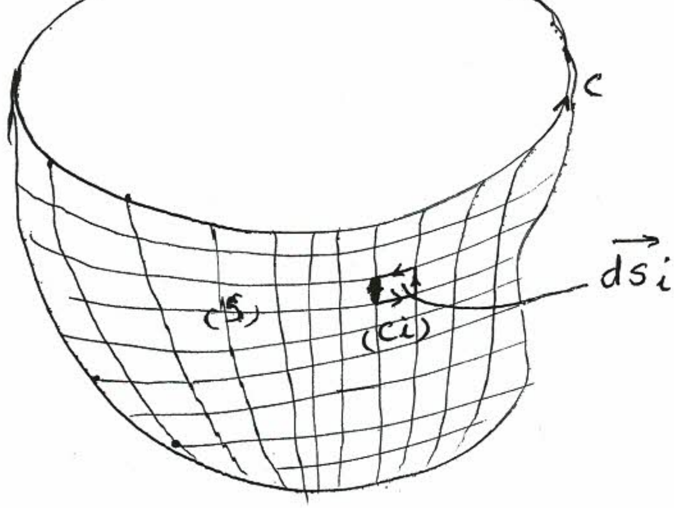
- نظرية ستوكس (Stokes) أو نظرية الدوراني :

ليكن مسار مغلق (c) يرتكز على مساحة (s). وليكن $\vec{E}$ حقلا شعاعيا مستمر وقابل للاشتقاق على (s).

$$\oint_{(c)} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \iint_{(s)} \overrightarrow{Rot}\,\vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_{(ci)} \vec{E}\,\overrightarrow{dli} = \overrightarrow{Rot}\,\vec{E}\,\overrightarrow{ds_i}$$



4 - مؤثر لبلاس (Le Laplacien) :

هو مؤثر تفاضلي من الدرجة الثانية يدخل على حقل سلمي أو حقل شعاعي ليعطي حقلا سلميا أو شعاعيا.

* ليكن الحقل السلمي φ : $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

ليكن $\vec{E}$ حقلا شعاعيا حيث : $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$

$$\Delta\vec{E} = \Delta E_x\vec{i} + \Delta E_y\vec{j} + \Delta E_z\vec{k}$$

$$\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

ونفس الشيء بالنسبة لـ ΔE_y و ΔE_z .

5 - المؤثر نابلا (Nabla) $\vec{\nabla}$:

هو مؤثر تفاضلي خاص يمكن أن يدخل على حقول سلمية أو شعاعية بطرق مختلفة. باستعمال $\vec{\nabla}$ يمكن الحصول بسهولة على $\overrightarrow{grad}$ ، div و $\overrightarrow{Rot}$.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

* $\overrightarrow{grad}\,\varphi$ يساوي جداء $\vec{\nabla}$ في φ على اليمين : $\overrightarrow{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}.\varphi$

* $div\,\vec{E}$ هو الجداء السلمي بين $\vec{\nabla}$ و $\vec{E}$:

$$div\,\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

* $\overrightarrow{Rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E}$: $\vec{E}$ و $\vec{\nabla}$ هو الجداء الشعاعي بين $Rot\,\vec{E}$

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

* لبلاس : $\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$

$$\Delta V = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}V = \vec{\nabla}^2 V = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot V$$

$$\Delta\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}^2\vec{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot\vec{E}$$

6- بعض العلاقات بين المؤثرات التفاضلية :

$$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}\,V) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\cdot V) = (\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla})\cdot V = \vec{0}$$

$$div(\overrightarrow{grad}\,V) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot V) = \vec{\nabla}^2 V = \Delta V$$

$$div(\overrightarrow{Rot}\,\vec{E}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = (\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla})\cdot\vec{E} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{Rot}\,\vec{E}) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\vec{E})$$

$$= \Delta\vec{E} - \overrightarrow{grad}(div\,\vec{E})$$

7- عبارات التدرج والتباعد في جمل الاحداثيات الأسطوانية والكروية :

* لتكن الدالة السلمية $f(r,\theta,z)$ في الإحداثيات الأسطوانية :

نعرف أن : $\overrightarrow{grad}\,f\cdot\overrightarrow{dl}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz = \overrightarrow{grad}\,f\cdot\overrightarrow{dl}$$

$\overrightarrow{grad}\,f = [\overrightarrow{grad}\,f]_r\cdot\vec{u}_r +$ ونأخذ : $\overrightarrow{dl} = dr\cdot\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{k}$

$[\overrightarrow{grad}\,f]_\theta\cdot\vec{u}_\theta + [\overrightarrow{grad}\,f]_z\cdot\vec{k}$

إذن :

$$\frac{\partial f}{\partial r}\cdot dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz = [\overrightarrow{grad} f]_r \cdot dr$$

$$+ [\overrightarrow{grad} f]_\theta \cdot r\, d\theta + [\overrightarrow{grad} f]_z \cdot dz$$

ومقارنة طرفي المعادلة يعطينا:

$$[\overrightarrow{grad} f]_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad [\overrightarrow{grad} f]_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \quad , \quad [\overrightarrow{grad} f]_r = \frac{\partial f}{\partial r}$$

إذن :

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot \vec{k}$$

في الاحداثيات الكروية :

$$\vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi$$

وباتباع نفس الطريقة نجد:

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot \vec{u}_\varphi$$

لحصول على التباعد نطبق نظرية Green - Ostrogradski على حجم عنصري dV :

$$\iint_{(S)} \vec{E}\cdot \vec{ds} = \iiint_{dv} div\, \vec{E}\, dv = div\vec{E}\cdot dv$$

* في الاحداثيات الأسطوانية نجد:

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

* في الإحداثيات الكروية نجد:

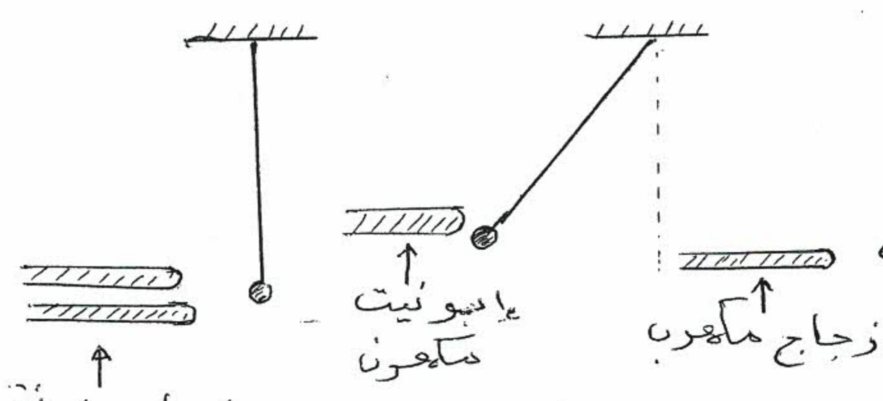
$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta\, E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

الفصل الثاني : الشحنة الكهربائية
الحقل والكمون الكهروساكنان

1 - التكهرب (L'Elecrisation) :

نعتبر التجربة البسيطة التالية : أمشط شعرك في يوم جاف ثم قرب المشط بعد ذلك من قصصات ورقية صغيرة. سوف تلاحظ أنها تنجذب نحو المشط بسرعة. تحصل نفس الظاهرة عندما ندلك قضيبا من الزجاج بقطعة من الحرير أو قضيبا من الإيبونيت (Ebonite) بقطعة من الفرو. نستنتج إذن أن بعض المواد تمتلك بعد دلكها خاصية أطلق عليها إسم "الكهرباء" نسبة إلى الكهرمان " المشتق من الكلمة اليونانية " Elektron ". نقول أن المادة التي امتلكت هذه الخاصية بعد الدلك قد صارت "مكهربة". هذه الخاصية تولد داخل المادة فعلا آخر يسمى " التأثير الكهرومغناطيسي " وهو يملك فروقا أساسية بينه وبين الفعل الثقالي (أو تأثير الجاذبية " لكي نتعرف على بعض هذه الفروق، نجري التجارب الأولية التالية :

التجربة 1 : نأخذ كرية صغيرة من مادة البوليستيران (poly - styrene) ونعلقها بخيط طويل.

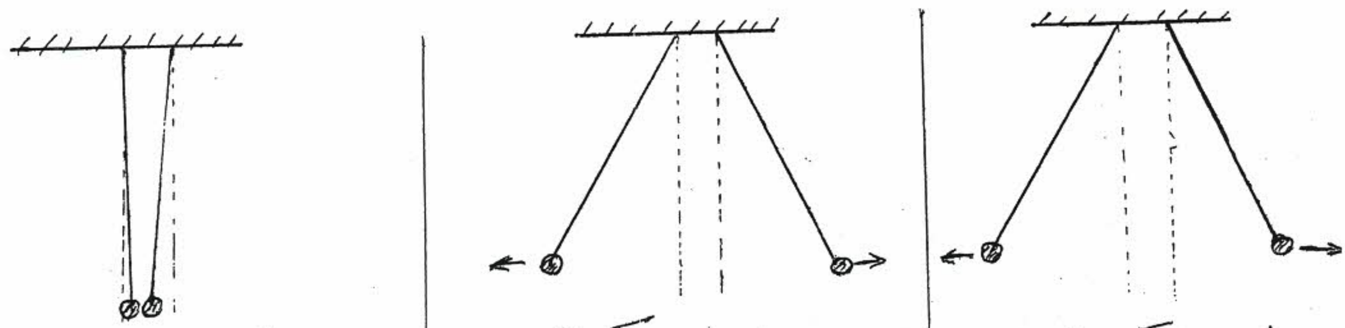


* عندما نقرب من الكرية قضيبا من الزجاج مكهربا (تم دلكه بقطعة من الحرير) فإننا نلاحظ أنها تنجذب نحوه.

* عندما نعيد العملية باستعمال قضيب من الإيبونيت مكهرب، فإننا نلاحظ نفس الظاهرة.

* عندما نقرب القضيبين المكهربين معًا من الكرية، فإنهما يولدان تأثيرًا ضعيفا جدًا أو قد يكون معدومًا.

التجربة 2 : نأخذ الآن كريتين من البوليستيران معلقتين بخيطين قريبين من بعضهما.



بعد لمس الكريتين بزجاج مكهرب

بعد لمس الكريتين بإيبونيت مكهرب

عندما نلمس كرية بزجاج مكهرب والأخرى بإيبونيت مكهرب

نلاحظ ما يلي :

* عندما نلمس الكريتين بقضيب من الزجاج مكهربا فإنهما تتنافران.

* كذلك عندما نلمسهما بقضيب من الإيبونيت مكهرب فإنهما تتنافران أيضا.

* ولكن عندما نلمس واحدة بالزجاج والأخرى بالإيبونيت فإنهما تتجاذبان.

نستنتج من التجربتين ما يلي :

- فعل "التأثير الثقالي" الذي هو دائما فعل تجاذب، يختلف عن فعل "التأثير الكهربائي" الذي يمكن أن يكون فعل تجاذب أو تنافر.

- هذا الاختلاف يرجع إلى وجود نوعين من الكهرباء، الأولى خاصة بالزجاج وتسمى موجبة والثانية خاصة بالإيبونيت وتسمى سالبة.

• الكهرباء التي هي من نفس النوع تتنافر والتي هي من نوعين مختلفين تتجاذب.

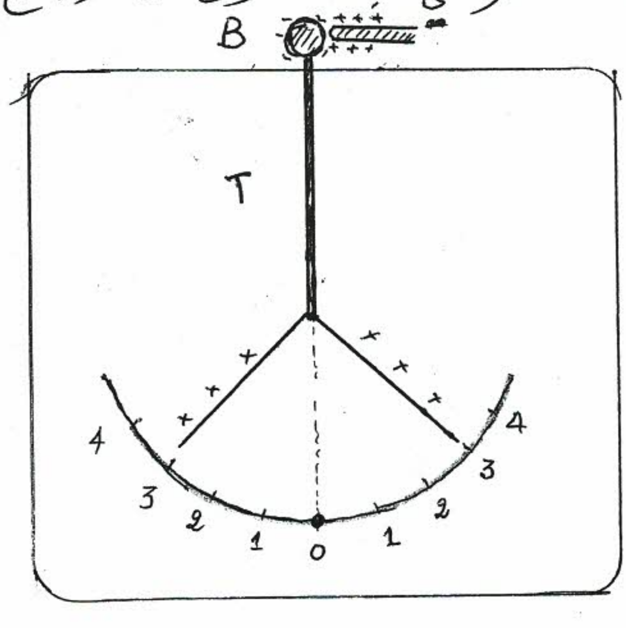
• الكهرباء الموجبة والسالبة "يعدمان" بعضهما البعض وهذا عكس الكتلة التي تتكون من نوع واحد.

2- الشحنة الكهربائية (La charge électrique):

بنفس الطريقة التي وصفنا بها قوى الفعل الثقالي حيث أرفقنا كل جسم بكتلة m ، نصطلح أيضا أن لكل جسم مكهرب "كتلة كهربائية" أو لتفادي الالتباس، نسميها بطريقة أفضل "الشحنة الكهربائية" والتي نرمز لها عادة بالرمز q أو Q.

يمكن إكتشاف الشحنة الكهربائية وقياسها باستعمال جهاز إلكتروسكوب (إلكترومتر) يتكون من كويرة معدنية B موصولة بسلك معدني T. السلك موصول في طرفه الآخر بصفيحتين رقيقتين من الذهب أو الألومنيوم (Al) قريبتين جدا من بعضهما. "أنظر الشكل".

يعزل الجهاز كهربائيا عن الوسط الخارجي بصندوق من الزجاج.

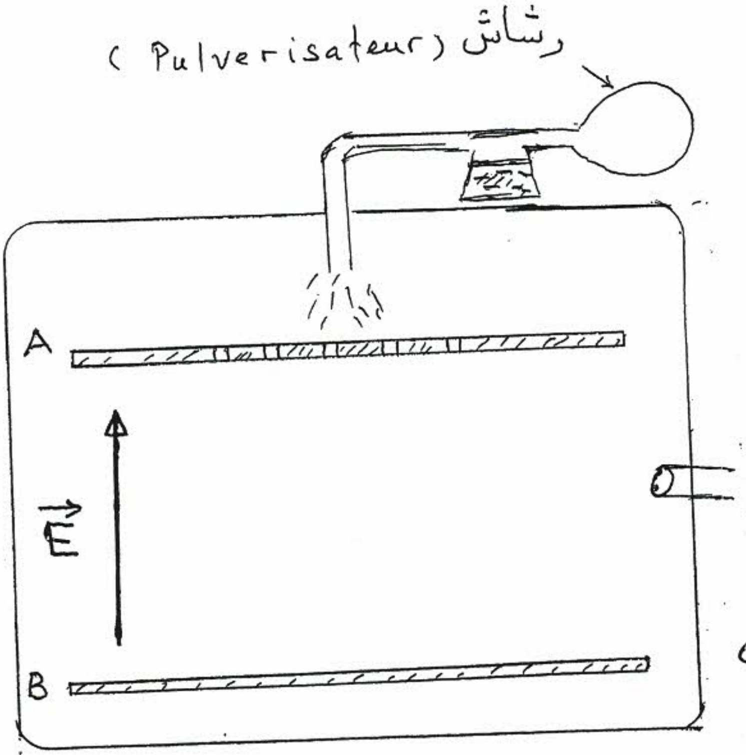


بمجرد اقتراب جسم مكهرب من الكويرة B ، الصفيحتان تبتعدان عن بعضهما. الإبتعاد متناسب من الشحنة التي يحملها القضيب المكهرب.

الجهاز يسمح بتحسس الكهرباء الضعيفة جدا.

3 - تكميم الشحنة الكهربائية :

الشحنة الكهربائية ليست كمية إعتباطية ، فهي محددة تماما بالنسبة لوحدة أساسية أي مكممة . للتأكد من ذلك ، نتناول التجربة التي قام بها الفيزيائي الأمريكي ميليكان (Milikan) والمعروفة بتجربة قطرة الزيت .



استعمل ميليكان صفيحتين متوازيتين A و B بينهما حقل كهربائي $\vec{E}$ يمكن أن يكون ثابتا أو متناوبا .
الصفيحة العليا A تحتوى على ثقوب صغيرة فوقها رشاش زيت . الثقوب تسمح بمرور قطرات الزيت التي تخرج من الرشاش . هذه القطرات تتعرض أثناء السقوط إلى قوة احتكاك :

$\vec{F_f} = 6\pi\eta r\vec{V}$. η هو معامل لزوجة الزيت في الهواء ، r نصف قطر قطرة الزيت ، $\vec{V}$ سرعة قطرة الزيت .

عندما يكون $\vec{E}$ مقطوعا ، فإن معادلة الحركة لقطرات الزيت تكتب :

$$m\vec{\gamma} = m\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{V}$$

أو

$$m\gamma = mg - 6\pi\eta r V$$ بالاسقاط على المحور oz

تصل القطرة إلى سرعتها الحدية V_l لما $\gamma = 0$ أي :

$$V_l = V_1 = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2 \cdot \rho r^2 g}{9\eta}$$

حيث ρ هي الكتلة الحجمية للزيت المستعمل . عندما ندخل دافعة أرخميدس تتغير الكتلة الحجمية ρ إلى $\rho - \rho_a$ حيث ρ_a هي الكتلة الحجمية للهواء .

نفترض أن قطرة الزيت قد اكتسبت شحنة كهربائية $q>0$ عند خروجها

من الرشاش. عندما نطبق الحقل $\vec{E}$ ، تصير معادلة الحركة :

$$m\vec{\gamma} = q\cdot\vec{E} - 6\pi\eta r\vec{V} - m\vec{g}$$

والسرعة الحدية لقطرة الزيت هي : $v_\ell = V_2 = \frac{qE - mg}{6\pi\eta r}$

وعندما نعوض mg نجد : $q = 6\pi\eta r(V_1 + V_2)/E$

يمكن أن نحصل على نصف القطر r من علاقة V_1 لأن تحديد V_1 يسمح بحساب r . نحصل على V_2 بمراقبة قطرة الزيت داخل الجهاز بين A و B باستعمال المنظار.

عندما تكون الشحنة q سالبة فإن صعود القطرة نحو الأعلى يتم بتغيير إتجاه $\vec{E}$ نحو الاسفل. عند قطع ووصل الحقل $\vec{E}$ عدة مرات نلاحظ أن قطرة الزيت تتحرك صعوداً ونزولاً مع المحافظة على السرعة V_1 ، غير أن السرعة V_2 تتغير من حين لآخر بسبب تغير شحنة القطرة q . هذا التغير يسببه الشوارد التي تتشكل في الهواء نتيجة الأشعاعات الكونية. يمكن تحريض كمية الشوارد في الهواء بين الصفيحتين بوضع منبع للأشعة γ أو X قرب الجهاز. القطرة يمكنها أن تأخذ شوارد من الهواء وتتغير بذلك شحنتها q .

بالرجوع إلى علاقة V_2 ، نجد أن التغير Δq و ΔV_2 للشحنة والسرعة مقيدين بالعلاقة :

$$\Delta q = \frac{6\pi\eta r\cdot\Delta V_2}{E}$$

Δq تكون مرة موجبة ومرة سالبة وفق طبيعة شحنة الشاردة التي التصقت بها.

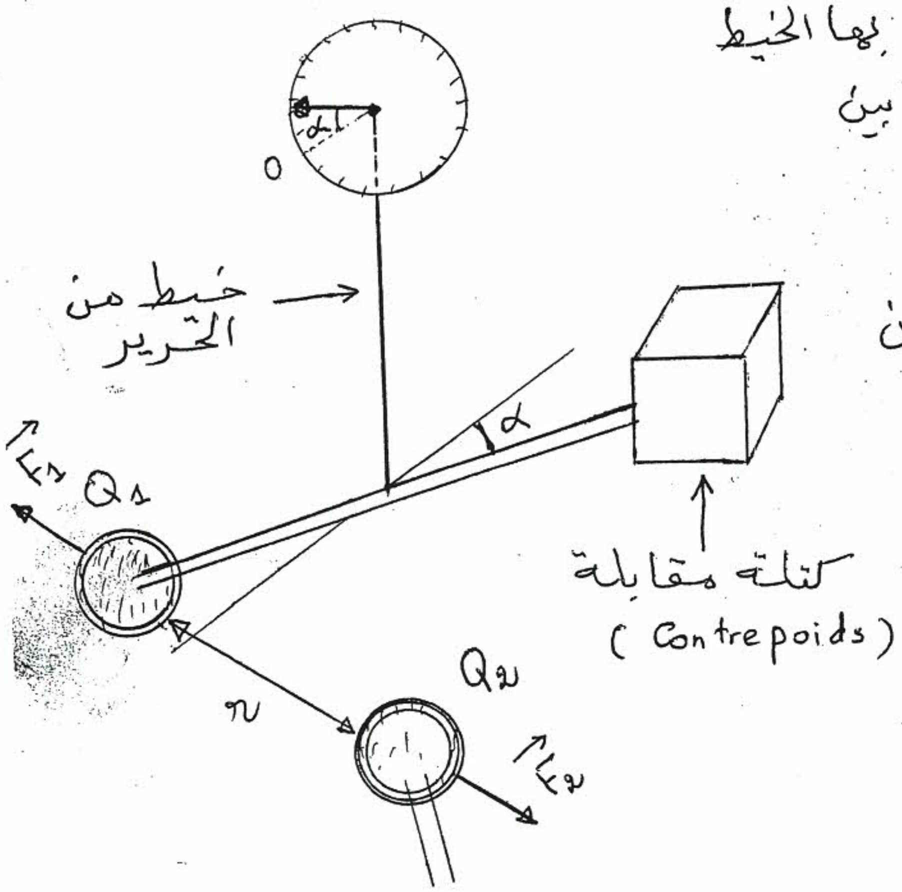
بإعادة تجربة قطرة الزيت عدة مرات ، توصل ميليكان إلى أن التغيرات Δq هي دائما مساوية لعدد طبيعي في شحنة e سميت بالشحنة الأساسية أي : $\Delta q = n\cdot e$

حيث : $e = 1.6021\cdot 10^{-19}\,C$.

e تسمى الشحنة الأساسية او العنصرية ، وكل الشحنات الملاحظة هي مساوية أو من مضاعفات الشحنة الأساسية.

4- قانون كولون (Loi de Coulomb) :

في سنة 1785 استطاع الفيزيائي الفرنسي C.A. Coulomb أن يحصل عن طريق التجربة على القانون الذي يعطي مقدار القوة الموجودة بين شحنتين كهربائيتين. لقياس هذه القوة استعمل كولون ميزان فتل كما هو مبين على الشكل.



قياس الزاوية α التي يفتل بها الخيط يسمح بقياس قوة التنافر بين الكرتين المشحونتين. بتغيير المسافة r بين الكرتين وقيمة الشحنتين Q_1 و Q_2 لاحظ كولون ما يلي:

- القوة الكهربائية متناسبة مع Q_1 و Q_2.
- القوة الكهربائية عكس متناسبة مع r^2.

$F_1 \propto Q_1$ ، $F_1 \propto Q_2$ و $F_1 \propto \frac{1}{r^2}$.

أي :
$$F_1 = K \cdot \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}$$
حيث K هو ثابت التناسب و هو يتعلق بنظام الوحدة المستعمل.

في النظام S.I. : $K = 8.988\ 10^9\ N.m^2/C^2$

و نأخذ عادة : $K \simeq 9 \cdot 10^9\ N.m^2/C^2$

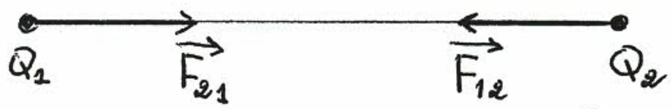
لتسهيل الحسابات وتطبيقات هذا القانون نعطي عادة للثابت k قيمة موافقة نكتب : $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ حيث ε_0 هي سماحية الفراغ. في النظام S.I. : $\varepsilon_0 = (8.854187817...).10^{-12}\, C^2/N.m^2$

$\varepsilon_0 \simeq 8.85\, 10^{-12}\, C^2/N.m^2$.

العلاقة السابقة لقانون كولون تعطي شدة القوة الكهربائية بين الشحنتين Q_1 و Q_2. شعاع القوة الكهربائية موجه حسب المستقيم الرابط بين الشحنتين. القوة الكهربائية موجهة :

• في اتجاه الشحنة الأخرى عند ما $Q_1Q_2<0$.

$Q_1Q_2<0 \Rightarrow$ تجاذب



• في الاتجاه المعاكس للشحنة الاخرى لما $Q_1Q_2>0$.

$Q_1Q_2>0 \Rightarrow$ تنافر

ولهذا يمكن ان نكتب قانون كولون في شكله الشعاعي كمايلي:

$$\vec F_{12} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec r_{12}}{r_{12}^3} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec u_{12}}{r_{12}^2}.$$

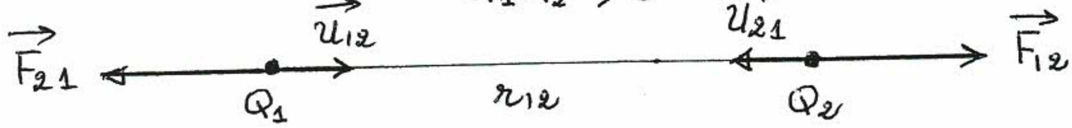
حيث : $\vec F_{12}$ هي القوة التي تؤثر بها الشحنة Q_1 على الشحنة Q_2.

$\vec r_{12}$ هو الشعاع الرابط بين Q_1 و Q_2 والموجه من Q_1 نحو Q_2.

$\vec u_{12}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec r_{12}$ أي : $\vec u_{12} = \frac{\vec r_{12}}{r_{12}}$

r_{12} هي المسافة بين Q_1 و Q_2. $r_{12} = \|\vec r_{12}\| = \|\vec r_{21}\|$

$Q_1Q_2>0$



لدينا : $r_{12} = r_{21}$ ، $\vec u_{12} = -\vec u_{21}$ ، $\vec F_{12} = -\vec F_{21}$.

قانون التطابق : القوة الكهربائية هي مثل القوى الاخرى مقدار شعاعي ، فالقوة الكلية التي تؤثر بها الشحن Q_1 ، Q_2 ، Q_3 ، ..... ، Q_n على الشحنة Q هي المحصلة :

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \cdots + \vec{F_n} .$$

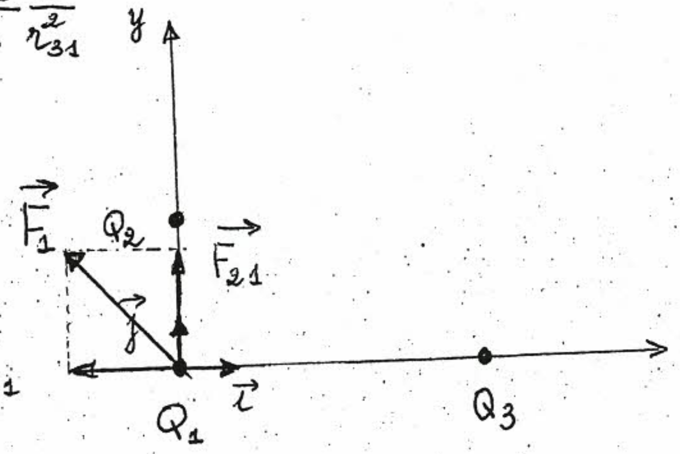
تطبيق : ما هي القوة التي تحس بها الشحنة Q_1 نتيجة وجود الشحنتين Q_2 و Q_3 . الشحن توجد عند رؤوس مثلث قائم الزاوية في Q_1 . نعطي : $Q_1 = 30\,\mu C$ ، $Q_2 = -60\,\mu C$ ، $Q_3 = 40\,\mu C$ ، $r_{21} = 1\,m$ و $r_{31} = 2\,m$.

$$\vec{F_1} = \vec{F_{21}} + \vec{F_{31}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{j}}{r_{21}^2} - \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{i}}{r_{31}^2}$$

$$(\vec{u}_{31} = - \vec{i})$$

$$\vec{F_1} = \frac{-Q_1 |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{j}}{r_{21}^2} - \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{i}}{r_{13}^2}$$

أو : $\|\vec{F_1}\| = \sqrt{\|\vec{F_{21}}\|^2 + \|\vec{F_{31}}\|^2}$



- الحقل الكهربائي (Le champ électrique) :

نعتبر التوزيع الشحني المشكل من عدة شحن نقطية Q_1 ، Q_2 ، Q_3 ، ..... ، Q_n تقع على التوالي في النقاط O_1 ، O_2 ، O_3 ، ..... ، O_n . نركز على القوة التي تؤثر بها هذه الشحن على شحنة Q تقع في نقطة M مع إمكانية تغييرها. القوة التي تؤثر على Q هي :

$$\vec{F_M} = \vec{F_{O_1M}} + \vec{F_{O_2M}} + \vec{F_{O_3M}} + \cdots + \vec{F_{O_nM}}$$

$$= \frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{O_1M}}{\|\vec{O_1M}\|^2} + \frac{QQ_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{O_2M}}{\|\vec{O_2M}\|^2} + \cdots + \frac{QQ_n}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{O_nM}}{\|\vec{O_nM}\|^2}$$

أو :

$$\vec{F_M} = Q \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{O_iM}}{\|\vec{O_iM}\|^2} \right)$$

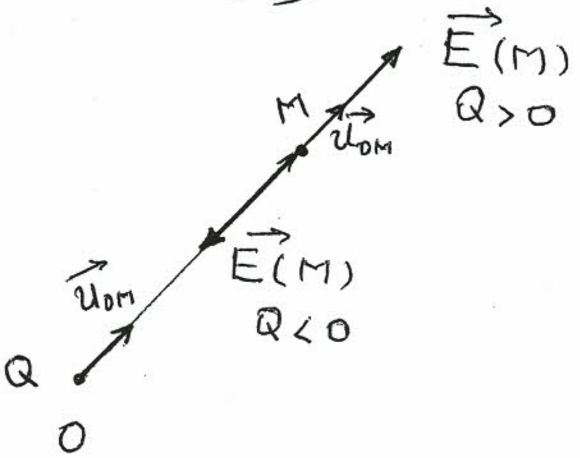
تغيير الشحنة Q بشحنة Q' لا يغيير العبارة الشعاعية الموجودة بين قوسين تحت الجمع. هذا المقدار الشعاعي الناتج عن الشحن المحيطة بالنقطة M هو مقدار مستقل عن الشحنة التي نضعها في M. هذا المقدار الشعاعي الذي نرمز له عادة بـ $\vec{E}(M)$ هو الحقل الكهربائي في M الناتج عن مجموع الشحن $\{Q_i\}$. إذن أي توزيع شحني $\{Q_i\}$ يخلق في المحيط المجاور له حقلا شعاعيا يسمى الحقل الكهربائي.
يمكن تحديد الحقل الكهربائي في نقطة M بمعرفة القوة الكهربائية التي تؤثر على شحنة Q موضوعة في M:

$$\vec{F}_Q(M) = Q \cdot \vec{E}(M)$$

هذه العلاقة هي مجرد صيغة أخرى لقانون كولون.
يمكن حساب القوة الكهربائية التي تؤثر على شحنة Q موجودة في نقطة M بطريقتين:

- بكتابة قانون كولون مع استعمال قانون التطابق،
- نحسب الحقل الكهربائي في M ثم نكتب: $\vec{F}_Q = Q.\vec{E}(M)$.

الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ في نقطة M من الفضاء والناتج عن شحنة Q موضوعة في نقطة O هو:



$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{OM}}{\|\vec{OM}\|^2}$$

أو:

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$$

لأن:

$$\vec{u}_{OM} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

عندما نأخذ: $\vec{OM} = \vec{r}$ ، $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = \frac{\vec{r}}{r}$ فإن $\vec{E}(M)$ يكتب:

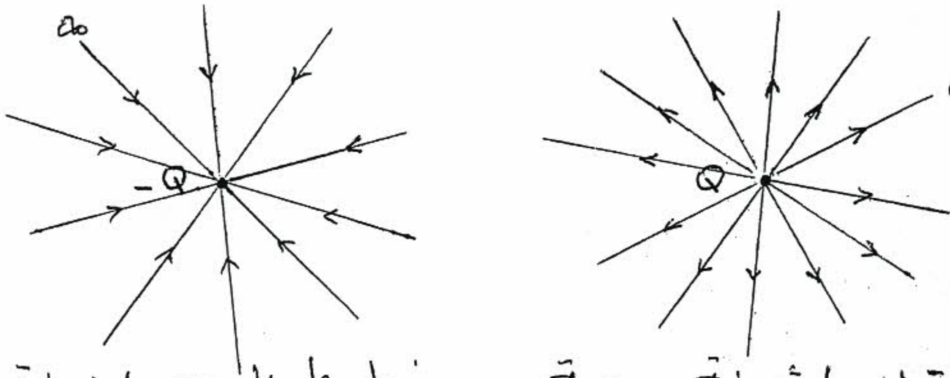
$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$$

، r هي المسافة بين O و M. $r = \|\vec{OM}\|$

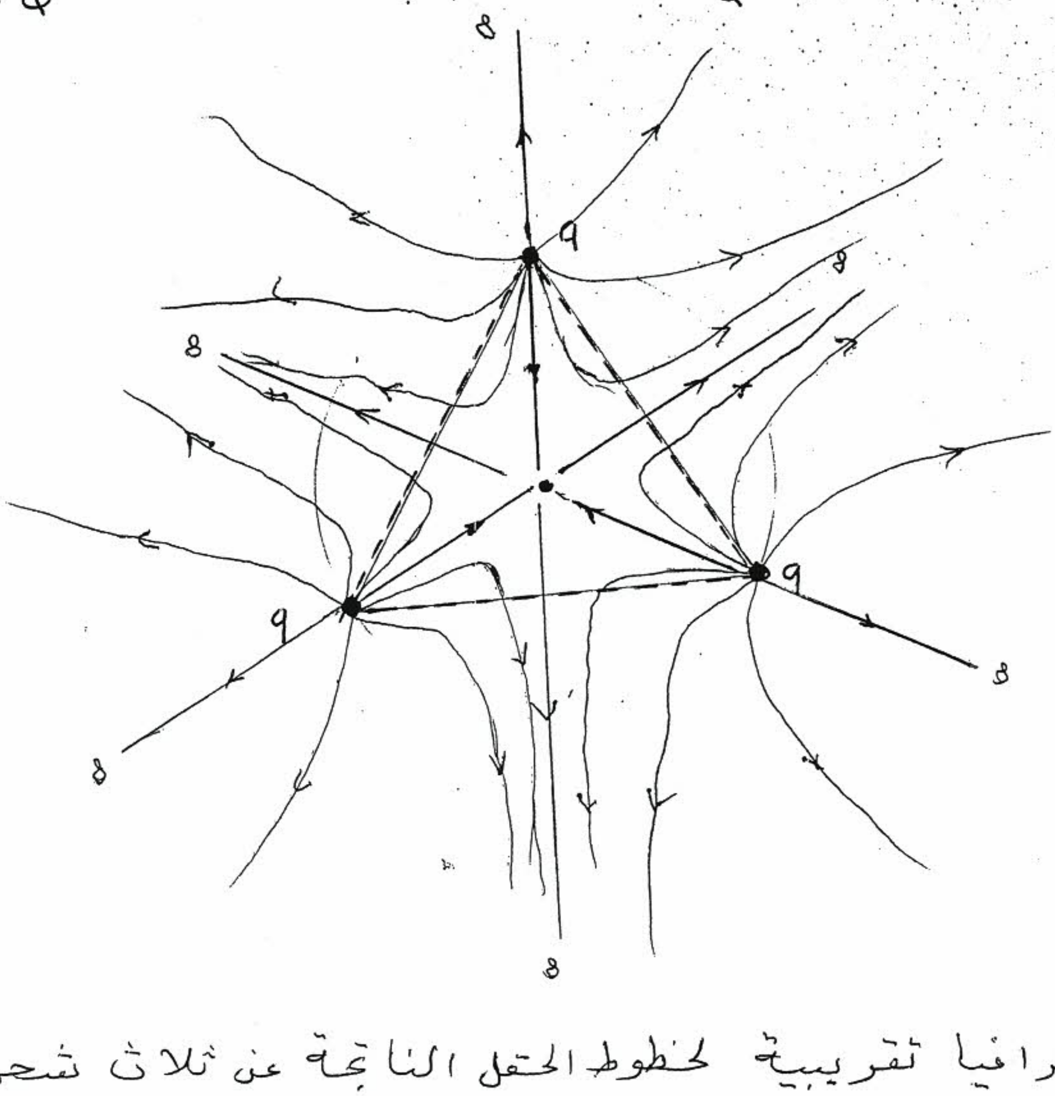
في النظام .S.I : $[E] = C/m^2 = V/m$

ملاحظة : الحقل الكهربائي غير معرّف في O موقع الشحنة التي تنتجه.

خطوط الحقل الكهربائي لا تتقاطع أبداً ، فهي تنطلق من الشحن الموجبة أو ما لا نهاية (∞) وتنتهي عند الشحن السالبة أو ما لا نهاية.



خطوط الحقل لشحنة سالبة -Q   خطوط الحقل لشحنة موجبة Q



طبوغرافيا تقريبية لخطوط الحقل الناتجة عن ثلاث شحن موجبة q+ توجد على رؤوس مثلث متساوي الأطراف. الخطوط الممثلة هي فقط في مستوي المثلث.

6. الكمون الكهربائي الناتج عن شحنة نقطية :

رأينا في المدخل الرياضي أن الحقل الشعاعي عندما يكون مشتقا من كمون (حقل محافظ) فإنه يكون مرتبطا بهذا الكمون وفق العلاقة : $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$

إنطلاقا من هذه العلاقة يمكن أن نعرف الكمون V بالعلاقة :

$$dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl}$$

أي :

$$V(A) - V(B) = \int_{A(C)}^{B} \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

نعتبر شحنة نقطية q موضوعة في O . في نقطة M من الفضاء، هذه الشحنة تنتج حقلا كهربائيا $\vec{E}$.

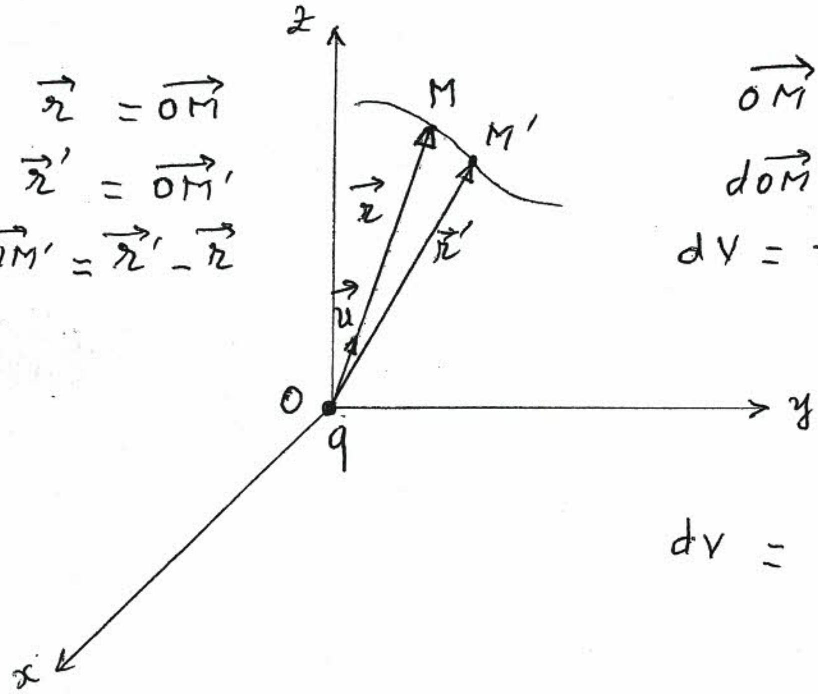
الكمون الكهربائي في النقطة M معطى بالعلاقة :

$$dV = \vec{E}(M)\cdot d\vec{OM} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}}{r^2}\cdot d\vec{OM}$$

$\vec{r} = \vec{OM}$

$\vec{r}\,' = \vec{OM}\,'$

$\vec{MM'} = \vec{r}\,' - \vec{r}$



$$\vec{OM} = \vec{r} = r\cdot\vec{u}$$

$$d\vec{OM} = dr\cdot\vec{u} + r\cdot d\vec{u}$$

$$dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}}{r^2}\cdot\left[dr\cdot\vec{u} + r\,d\vec{u}\right]$$

ولأن ; $d\vec{u} \perp \vec{u}$

فإننا نجد :

$$dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr}{r^2}$$

وعندما نكامل نحصل على :

$$V(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} + V_0$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} + V_0$$

V_0 هو ثابت التكامل وتحدد بمعرفة مبدأ الكمون . في حالة عدم وجود شحن في (∞)، فمبدأ الكمون نضعه عادة في ∞ أي : $V(\infty) = 0$

ونجد : $V_0 = 0$. في النظام .S.I : $[V] = C/m = [E]\cdot[L] = V$

* الكمون الكهربائي لمجموعة من الشحن النقطية :

إذا كانت لدينا n شحنة كهربائية نقطية $\{q_i\}$ موزعة في الفضاء فإن قانون التطابق يسمح بكتابة الكمون الكهربائي الكلي في نقطة M بالعلاقة :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_i} + V_0$$

ثابت الكمون V_0 يتم تحديده باختيار مبدأ للكمون الكهربائي. في حالة عدم وجود شحن كهربائية في ∞، نأخذ المبدأ في ∞ أي $V(\infty) = 0$ ونجد $V_0 = 0$. عند وجود شحن كهربائية في ∞ (التوزيع الشحني لا منتهي) فإن اعتبار $V_0 = 0$ يصير غير ممكن.

8- عمل القوة الكهربائية :

لتكن شحنة كهربائية نقطية q_0 موجودة داخل حقل كهربائي $\vec{E}$. داخل هذا الحقل تتعرض q_0 إلى قوة : $\vec{F} = q_0\vec{E}$ نقل الشحنة q_0 من A إلى B داخل هذا الحقل يتطلب بذل عمل يساوي عمل القوة $\vec{F}$:

$$W_{A\to B} = \int_A^B q_0\, \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_A^B q_0\, dV$$

$$W_{A\to B} = q_0\left[V(A) - V(B)\right]$$

$V(A) - V(B)$ يسمى فرق الكمون بين النقطتين A و B . من علاقة $W_{A\to B}$ تم تعريف وحدة الكمون التي تعرف بالفولط (Volt) في النظام .S.I : " الفولط هو فرق الكمون الذي يوجد بين نقطتين في فضاء يوجد به حقلا كهربائيا بحيث يتطلب نقل شحنة $q = 1C$ بين هاتين النقطتين إلى عمل يساوي 1جول (1 J) "

$$[1\,J] = [1\,C] \times [1.V]$$

$$1\,eV = 1.6021\, 10^{-19}\, C \times 1\,V = 1.6021\, 10^{-19}\, J$$

من العلاقة العامة : $dW = -d\,E_p$ (E_p = الطاقة الكامنة)

نجد : $dW = -d(qV)$ ونستنتج أن الطاقة الكامنة لشحنة كهربائية توجد داخل كمون كهربائي V هي :

$$E_p = q \cdot V .$$

9 ـ الحقل والكمون الكهربائيان لتوزيع شحني مستمر (غير نقطي) :

جميع العلاقات السابقة الخاصة بالحقل والكمون أو القوة الكهربائية تتعلق بالحالة التي تكون فيها الشحن نقطية ، أي أبعادها " لا متناهية في الصغر " وهذا صحيح فقط عندما نتعامل مع شحن الجزيئات العنصرية مثل e^- و P^+ ويبقى ذلك مقبولا عندما عندما تكون أبعاد الأشياء المشحونة صغيرة جداً مقارنة بالأبعاد التي تفصلها عن المشاهد .

سوف نرى في ما يلي التغيرات في أبعاد الجسم التي تجعل الشحنة غير نقطية مروراً بثلاث مراحل :

1 ـ أبعاد الجسم تكون معتبرة فقط في اتجاه واحد وتبقى صغيرة في اتجاه البعدين الاخرين . الجسم هي هذه يكون عبارة عن سلك مشحون مستقيم أو منحني والتوزيع الشحني يسمى توزيعا خطيا .

2 ـ الجسم يكون ممتداً في اتجاهين ، ويشكل سطحا مستويًا أو منحنيا والتوزيع الشحني يسمى توزيعًا سطحيًا .

3 ـ الجسم ممتداً في الابعاد الثلاثة للفضاء ويمثل في هذه الحالة حجما مشحونا بصفة مستمرة ونتكلم عند ذلك توزيع شحني حجمي .

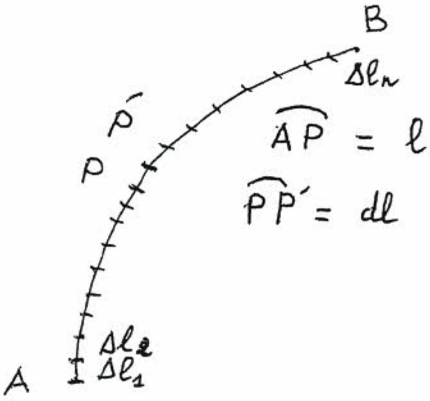
9 ـ 1 ـ التوزيع الشحني الخطي :

أ ـ الكثافة الشحنية الخطية :

نعتبر سلك AB ، مستقيم أو منحني . طوله L ($\overset{\frown}{AB} = L$) ويحمل شحنة كهربائية q موزعة بانتظام على كل السلك .

نسمي الكثافة الشحنية الخطية
أو شحنة وحدة الطول :

$$\lambda = \frac{q}{L} \quad [C/m]$$



في الحالة العامة الشحنة q غير موزعة بانتظام والكثافة الشحنية λ تصير تتغير عند الانتقال من نقطة إلى أخرى على السلك ونكتب : $\lambda = \dfrac{dq}{dl}$.

نعتبر نقطة P من السلك معينة بالإحداثية المنحنية l . عندما المبدأ ينطابق مع A ($A \equiv O$)، فإن $\widehat{AP} = l$. لتكن نقطة P' قريبة جدا من P إحداثيتها $l + dl$. الطول العنصري $\widehat{PP'}$ طوله dl ويحمل شحنة عنصرية dq . نسمي الكثافة الشحنية الخطية عند l، $\lambda(l)$ حيث :

$$\lambda(l) = \lim_{dl \to 0} \frac{dq}{dl}$$

واضح هنا أن كلا من dq و dl ينتهيان إلى الصفر غير أن النسبة بينهما تنتهي إلى قيمة محددة . وحدة λ هي دائما C/m .
لحساب الشحنة الكلية q ، عند معرفة $\lambda(l)$ ، نقسم السلك إلى قطع عنصرية صغيرة جدا $\{\Delta l_i\}$. كل قطعة Δl_i تحمل شحنة Δq_i . بحيث : $\Delta q_i = \lambda(l_i) . \Delta l_i$
الشحنة الكلية للسلك هي إذن : $q = \sum_{i=1}^{n} \Delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda(l_i) . \Delta l_i$

قيمة q هي قيمة تقريبية فقط لأننا اعتبرنا القطعة Δl_i تحمل نفس الكثافة $\lambda(l_i)$. هذه القيمة التقريبية لـ q تقترب من القيمة الحقيقية كلما كانت القطع Δl_i صغيرة وعندما يصبح عددها لا متناهي ($n = \infty$) فإن : $q = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta q_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(l_i) . \Delta l_i$

أي :

$$q = \int dq = \int_{L_A}^{L_B} \lambda(l)\, dl$$

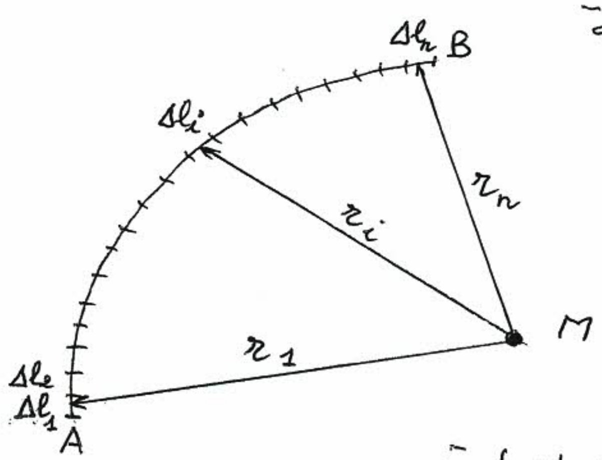
وفق تعريف التكامل بمفهوم ريمان .

عندما يكون λ منتظم (أي ثابت) : $q = \int_{L_A}^{L_B} \lambda \, dl = \lambda L$

لأن ؛ $L_B - L_A = L$.

ب - الكمون الكهروساكن الناتج عن توزيع شحني خطي:

ليكن سلك AB يحمل كثافة شحنية خطية $\lambda(l)$.



لحساب الكمون الكهربائي $V(M)$ في نقطة كيفية M من الفضاء ، نقسم السلك إلى قطع صغيرة $\{\Delta l_i\}$ بحيث يمكن اعتبار كل النقاط التي تنتمي إلى القطعة Δl_i توجد على نفس المسافة r_i من M ، الكثافة الشحنية λ_i للقطعة Δl_i ثابتة و الشحنة Δq_i للقطعة Δl_i شحنة نقطية .

القطعة Δl_1 تنتج في النقطة M كمونا عنصريا :

$$\Delta V_1 = \frac{\Delta q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{\lambda(l_1) \cdot \Delta l_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}$$

القطعة Δl_i تنتج ΔV_i : $\Delta V_i = \frac{\Delta q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_i} = \frac{\lambda(l_i) \cdot \Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_i}$

الكمون الكلي $V(M)$ هو مجموع الكمونات العنصرية ΔV_i الناتجة عن كل القطع $\{\Delta l_i\}$.

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(l_i) \cdot \Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_i}$$

وعندما يكون عدد القطع $\{\Delta l_i\}$ لا متناهي ($n = \infty$) نحصل على :

$$V(M) = \int dV = \int_{L_A}^{L_B} \frac{\lambda(l) \, dl}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r(l)}$$

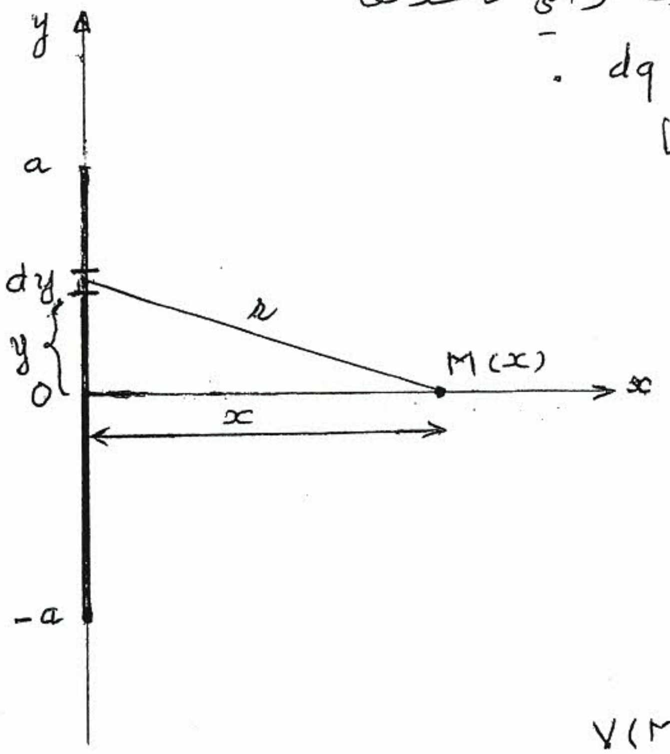
أو :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L_A}^{L_B} \frac{\lambda(l) \, dl}{r(l)}$$

سهولة حساب $V(M)$ تتعلق بشكل الدوال $\lambda(l)$ و $r(l)$

تطبيق : 1 - احسب الكمون الكهربائي لسلك مستقيم طوله $L = 2a$ يحمل كثافة شحنية خطية منتظمة λ في نقطة M تنتمي لمحور السلك.

نعتبر قطعة dy من السلك المشحون والتي نأخذها كشحنة نقطية dq . $dq = \lambda\, dy$.



هذه الشحنة dq تنتج في M كمونا عنصريا dV :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = \frac{\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

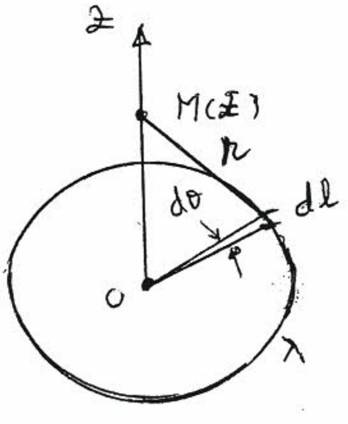
$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{-a}^{a}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\Big[\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big]$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{-a+\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

في حالة السلك اللامتناهي $(a\to\infty)$: $V(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2a}{x}$

2 - أحسب الكمون الكهربائي لحلقة دائرية نصف قطرها R وتحمل كثافة شحنية خطية منتظمة λ في نقطة M توجد على محورها oz .



القوس العنصري dl من الحلقة يملك شحنة عنصرية نقطية $dq = \lambda\, dl$ ويحدث في M كمونا عنصريا dV بحيث :

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} = \frac{\lambda . dl}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$dl = R\, d\theta$ و $r = (R^2+z^2)^{1/2}$

$$dV = \frac{\lambda R\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

الكمون $V(M)$ لكل الحلقة نحصل عليه بالمكاملة على θ ونجد :

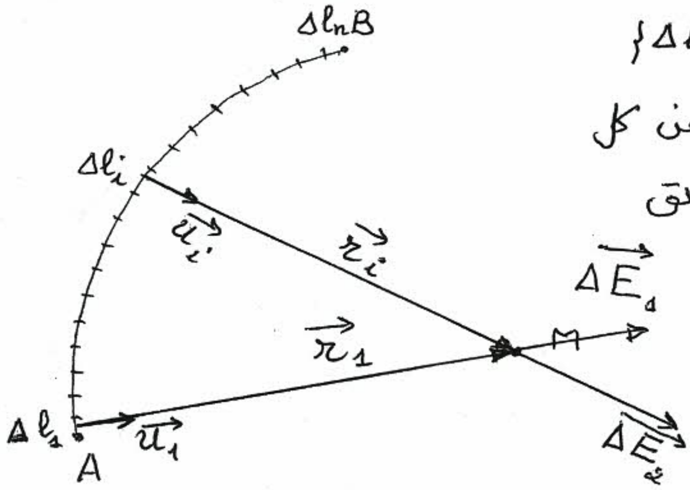
$$V(M) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}}\cdot\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{2\pi\lambda R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0(R^2+\ldots}$$

ج- الحقل الكهربائي الناتج عن توزيع شحني خطي :

عند معرفة $V(M)$ يمكن الحصول على $\vec{E}(M)$ من العلاقة : $\vec{E} = -\vec{grad}V$

بشرط أن تكون M نقطة كيفية من الفضاء.

- يمكن الحصول على $\vec{E}(M)$ عن طريق الحساب المباشر و نستعمل لذلك نفس الطريقة التي طبقناها في حساب الكمون $V(M)$.



نقسم السلك إلى قطع صغيرة $\{\Delta l_i\}$ ونحسب الحقل $\Delta \vec{E_i}(M)$ الناتج عن كل قطعة ثم باستعمال قانون التطابق نحسب الحقل الكلي $\vec{E}(M)$.

$$\overrightarrow{\Delta E_i} = \frac{\lambda_i \Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r_i}}{r_i^3} = \frac{\lambda_i \Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u_i}}{r_i^2}$$

الحقل الكلي $\vec{E}(M)$ هو مجموع الحقول $\overrightarrow{\Delta E_i}$

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i \Delta l_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u_i}}{r_i^2}.$$

وعندما يكون عدد القطع $\{\Delta l_i\}$ كبير جداً ، $n \to \infty$ ، فإن عبارة $\vec{E}(M)$ تحت الجمع Σ تكتب :

$$\vec{E}(M) = \int_{L_A}^{L_B} \frac{\lambda(l) \cdot dl}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}(l)}{r^2(l)}$$

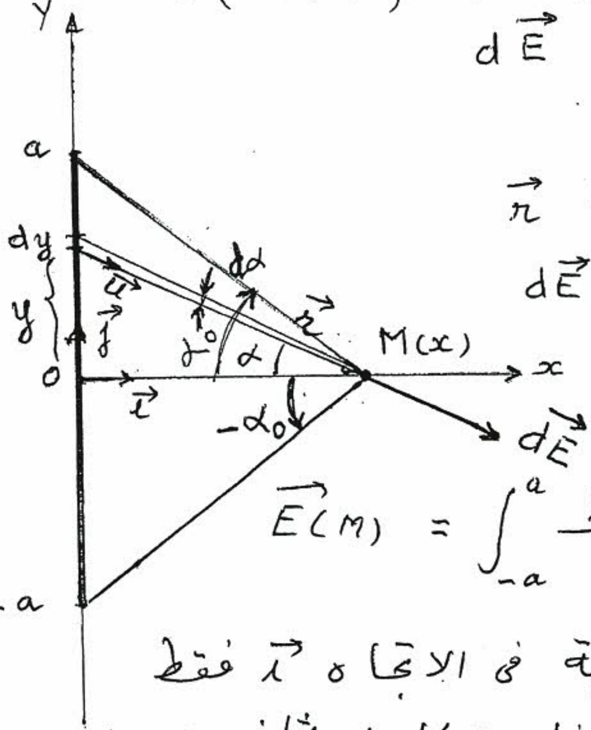
وعندما يكون التوزيع الشحني منتظم (λ ثابت) :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L_A}^{L_B} \frac{\vec{u}(l) \cdot dl}{r^2(l)}$$

بدلالة $\vec{r}(l)$ ، عبارة $\vec{E}(M)$ تكتب :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{L_A}^{L_B} \frac{\vec{r}(l) \cdot dl}{r^3(l)} \quad , \quad \vec{u}(l) = \frac{\vec{r}(l)}{r(l)}$$

تطبيق: 1 - نفس التطبيق في المثال السابق ($V(M)$).



$$d\vec{E} = \frac{\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} - y\vec{j} \quad , \quad r^3 = (x^2+y^2)^{3/2}$$

$$d\vec{E} = \frac{\lambda x\, dy}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{i}}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{\lambda y\, dy}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{j}}{(x^2+\ldots}$$

عندما نكامل لدينا:

$$\vec{E}(M) = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda\, x\, dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \cdot \vec{i} - \int_{-a}^{a} \frac{\lambda y\, dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2)^{3/2}} \vec{j}$$

بسبب التناظر الحقل $\vec{E}(M)$ يملك مركبة في الاتجاه $\vec{i}$ فقط
لذلك، ومن دون إجراء أي حساب، فإن التكامل الثاني في عبارة $\vec{E}(M)$
يجب أن يكون معدوما ويبقى:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda \cdot x \cdot \vec{i}}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{a} \frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

حساب هذا التكامل ليس سهلا ولذلك يفضل في حالة هذا المثال
استعمال طريقة أخرى لحساب $\vec{E}(M)$. فنعوض استعمال المتغيرة y
ونأخذ مكانها المتغيرة α التي تمثل الزاوية بين $\vec{OM}$ والشعاع $\vec{r}$.
العلاقة التي تربط بين y و α هي: $tg\alpha = \frac{y}{x}$ ونستنتج العلاقة بين

الزاوية العنصرية $d\alpha$ والقطعة العنصرية dy بمفاضلة هذه العلاقة
ونجد: $\frac{1}{\cos^2\alpha} d\alpha = \frac{dy}{x}$ وعندما نعوض في عبارة $d\vec{E}$ نجد:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} = \frac{\lambda\, x\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \cos^2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha\, \vec{i} - \sin\alpha\, \vec{j}}{r^2}$$

وبما أن: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ فإن: $r^2 = \frac{x^2}{\cos^2\alpha}$ وعندما نعوض نجد:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x} (\cos\alpha\, \vec{i} - \sin\alpha\, \vec{j}) \cdot d\alpha$$

إذن:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left[\vec{i} \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos\alpha\, d\alpha - \vec{j} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sin\alpha\, d\alpha \right]$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x}\cdot\Big[\sin\alpha\Big]_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\cdot\vec{i} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x}\cdot\Big[\cos\alpha\Big]_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\cdot\vec{j}$$

ونجد في النهاية :

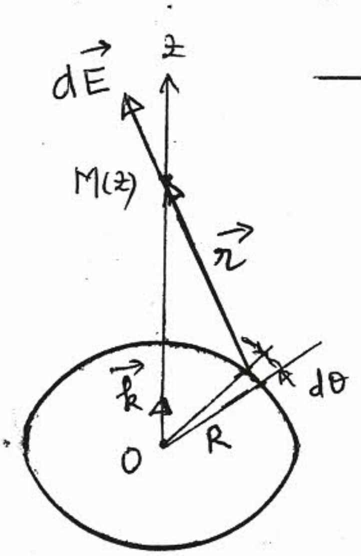
$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sin\alpha_0}{x}\cdot\vec{i}$$

في حالة سلك لامنتهي (طويل جداً) ‎$\alpha_0 = \pi/2$‎ :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{x}\cdot\vec{i}$$

---

2 - مثال الحلقة السابق .



$$d\vec{E} = \frac{\lambda R\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

$$\vec{r} = -R\cdot\vec{u}_r + z\cdot\vec{k}$$

$$r^3 = (z^2 + R^2)^{3/2}$$

$$d\vec{E} = \frac{-\lambda R^2\, d\theta\cdot\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}} + \frac{\lambda R z\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}\cdot\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{-\lambda R^2}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}\cdot\int_0^{2\pi}\vec{u}_r\cdot d\theta + \frac{\lambda R z\cdot\vec{k}}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}\cdot\int_0^{2\pi} d$$

بسبب التناظر حول المحور oz للحلقة ، فإن $\vec{E}(M)$ محمول بـ oz
أي يملك مركبة في الاتجاه $\vec{k}$ فقط ، إذن التكامل الأول في عبارة
$\vec{E}(M)$ معدوم ويبقى :

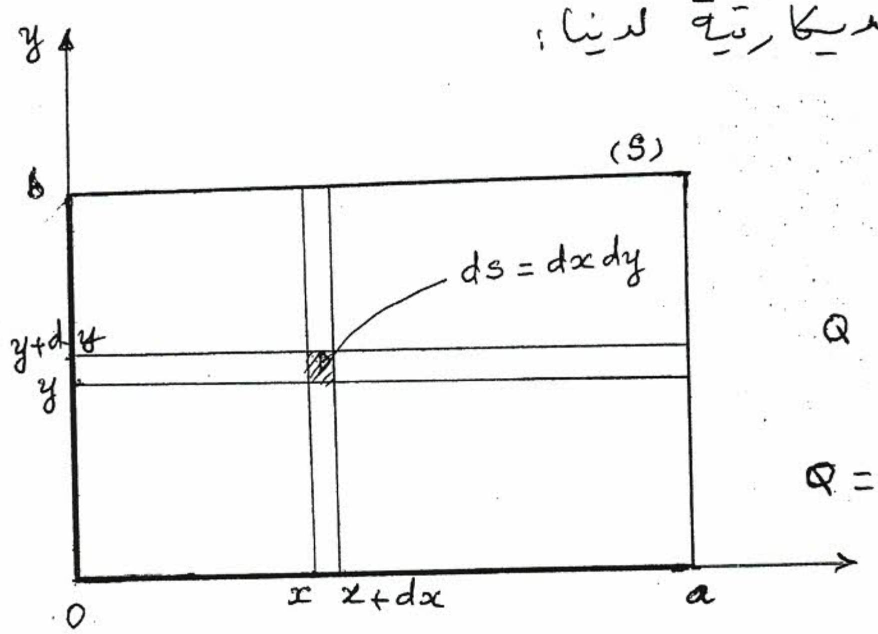
$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\cdot R\cdot z}{2\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}\cdot\vec{k}$$

9 - 2 - الكثافة الشحنية السطحية :

نعتبر سطح (S) تحمل شحنة كهربائية Q موزعة بانتظام . نسمي الكثافة الشحنية السطحية : $\sigma = Q/S$ حيث S هي مساحة السطح (S)
يمكن أن يكون السطح غير مشحون بانتظام وفي هذه الحالة يجب تحديد الكثافة الشحنية السطحية في كل نقطة من السطح ، باستعمال جملة الاحداثيات المناسبة لشكل السطح (S) .

- في حالة السطح المستوى نستعمل الاحداثيات الديكارتية أو القطبية.
- السطح الأسطواني يتطلب استعمال الاحداثيات الأسطوانية
- السطح الكروي يتطلب الاحداثيات الكروية .
- في حالة السطح الكيفي يجب استعمال طرق الحسابات الرقمية.

مثلا ، في الاحداثيات الديكارتية لدينا :



$$\sigma = \sigma(x, y)$$

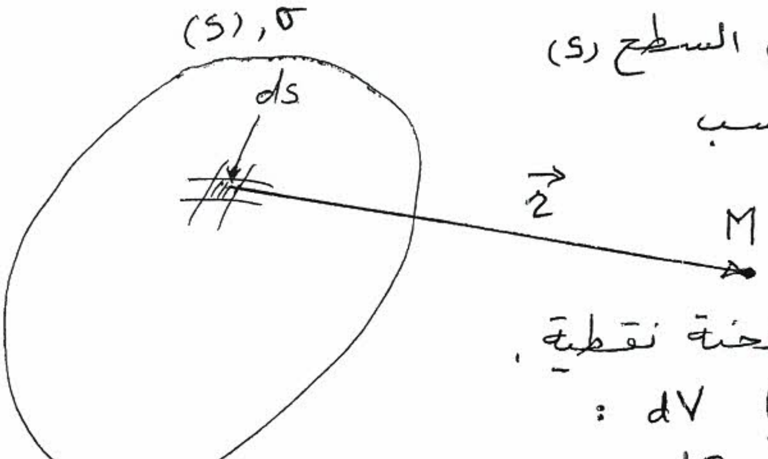
$$ds = dx\,dy$$

$$Q = \iint_{(S)} \sigma . dx\,dy$$

$$Q = \int_0^b \cdot \left[\int_0^a \sigma(x,y)\, dx \right] . dy$$

$$[\sigma] = C/m^2$$

الحقل والكمون الكهروساكنان :



نعتبر مساحة عنصرية ds من السطح (S) توجد على مسافة r من M التي نحسب فيها الكمون أو الحقل . المساحة العنصرية تحمل شحنة عنصرية $dQ = \sigma ds$ والتي يمكن اعتبارها كشحنة نقطية .

dQ تنتج في M كمونا عنصريا dV :

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\sigma . ds}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

الكمون الكهربائي الكلي الناتج عن كل الشحنة الموجودة على (S) هو:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma\, ds}{r}$$

عندما يكون التوزيع السطحي منتظم أي: ثابت $= \sigma$

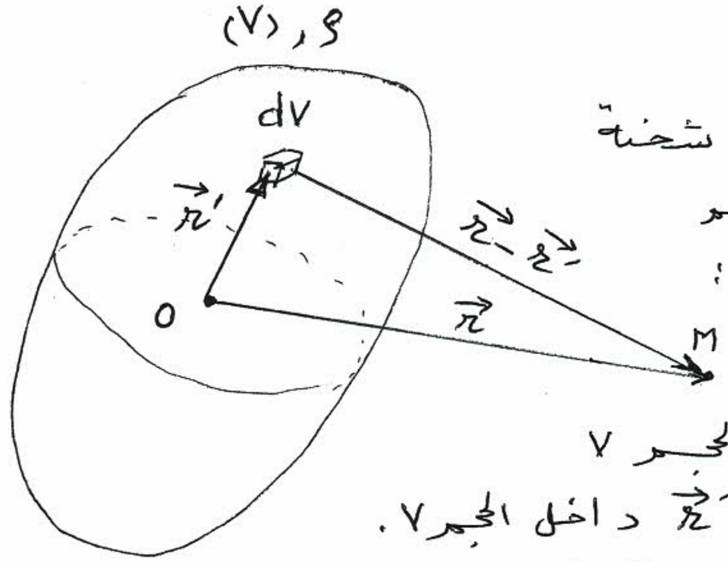
$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iint_{(S)} \frac{ds}{r}$$

وبنفس الطريقة نحصل على الحقل الكهربائي في النقطة M بالعلاقة:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iint_{(S)} \frac{\sigma \cdot ds}{r^2} \cdot \vec{u}$$

وعندما، ثابت $= \sigma$ ؛ $\quad \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iint_{(S)} \frac{ds}{r^2} \cdot \vec{u}$

$\vec{u}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec{r}$ الذي يربط بين ds و M.



9-3- الكثافة الشحنية الحجمية:

عندما يكون لدينا حجم V يحمل شحنة Q موزعة بانتظام داخل كل الحجم فإن الكثافة الشحنية الحجمية تكتب:

$[\rho] = [C/m^3] \cdot \quad \rho = Q/V$

عند تكون Q غير موزعة بانتظام على الحجم V فإن ρ تصبح تتعلق بموقع الحجم dV $\vec{r}'$ داخل الحجم V.

ونكتب: $dQ = \rho(\vec{r}') \cdot dV$ و الشحنة الكلية:

$$Q = \iiint_V \rho(\vec{r}') \cdot dV$$

- الكمون الكهربائي: الحجم العنصري dV المحيط بالنقطة $\vec{r}'$ يحمل الشحنة: $dQ = \rho(\vec{r}')\, dV$ وينتج في النقطة M المعرفة بالشعاع $\vec{r}$ كمونا عنصريا dV بحيث:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{r}')\, dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

أي :
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r})\, dv}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

وعندما يكون التوزيع منتظم ($\rho =$ ثابت) :

$$V(M) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint_V \frac{dv}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

- الحقل الكهربائي : بنفس الطريقة نحصل على الحقل الكهربائي العنصري

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho(\vec{r}')\cdot dv}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}\cdot\vec{u}$$

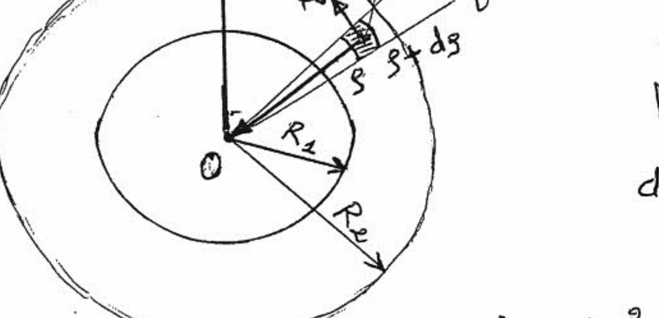
أو :
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')\cdot dv}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}\cdot\vec{u}$$

ولما : $\rho =$ ثابت :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iiint \frac{\rho(\vec{r}')\, dv}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}\cdot\vec{u}$$

$\vec{u}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec{r}-\vec{r}'$ الذي يربط بين dv و M .

تطبيق : الحقل والكمون الناتجان عن قرص مجوف نصف قطره الداخلي R_1 والخارجي R_2 ويحمل كثافة شحنية سطحية منتظمة σ في نقطة M توجد على المحور.



المساحة العنصرية ds من القرص تحمل شحنة عنصرية dQ ويمكن اعتبارها كشحنة نقطية : $dQ = \sigma . ds$

dQ تنتج في النقطة M حقلا عنصريا $d\vec{E}$:
$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u}}{r^2}$$

لدينا : $\vec{r} = -\rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{k}$ و $r^3 = (\rho^2+z^2)^{3/2}$

إذن :
$$d\vec{E} = \frac{-\sigma\rho^2 d\rho\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)^{3/2}}\cdot\vec{u}_\rho + \frac{\sigma z\rho\, d\rho\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)^{3/2}}\cdot\vec{k}$$

الحقل الكهربائي $\vec{E}(M)$ يساوي تكامل الحقل العنصري $d\vec{E}$ على كل المساحة المشحونة بين R_1 و R_2 :

$$\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{\rho^2 d\rho\, d\theta \,.\, \vec{u}_\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} + \frac{\sigma \,.\, z \,.\, \vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

كون oz محور للقرص تجعل $\vec{E}(M)$ محمول بالمحور oz (له مركبة في الاتجاه $\vec{k}$ فقط) والتكامل الأول في عبارة $\vec{E}(M)$ معدوم ولاجدوى من حسابه. ويبقى :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma \,.\, z \,.\, \vec{k}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{R_1}^{R_2}\rho\, d\rho \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

ورأينا أن :

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(x^2+a^2)^{1/2}} + cte$$

إذن :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma \,.\, z \,.\, 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{k}\cdot\left[\frac{1}{(R_1^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right]$$

أو :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma \,.\, z}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right]\cdot\vec{k}$$

في حالة مستوى لا منتهي : $R_1 \to 0$ و $R_2 \to \infty$ ، نجد :

$$\vec{E}(M) = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{k} \qquad \begin{cases} + : z>0 \\ - : z<0 \end{cases}$$

حساب الكمون :

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\cdot\int_0^{2\pi} d\theta$$

ونجد :

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left[\sqrt{R_2^2+z^2} - \sqrt{R_1^2+z^2}\right].$$

يمكن أن نتأكد بسهولة أن $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ أي : $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{k}$

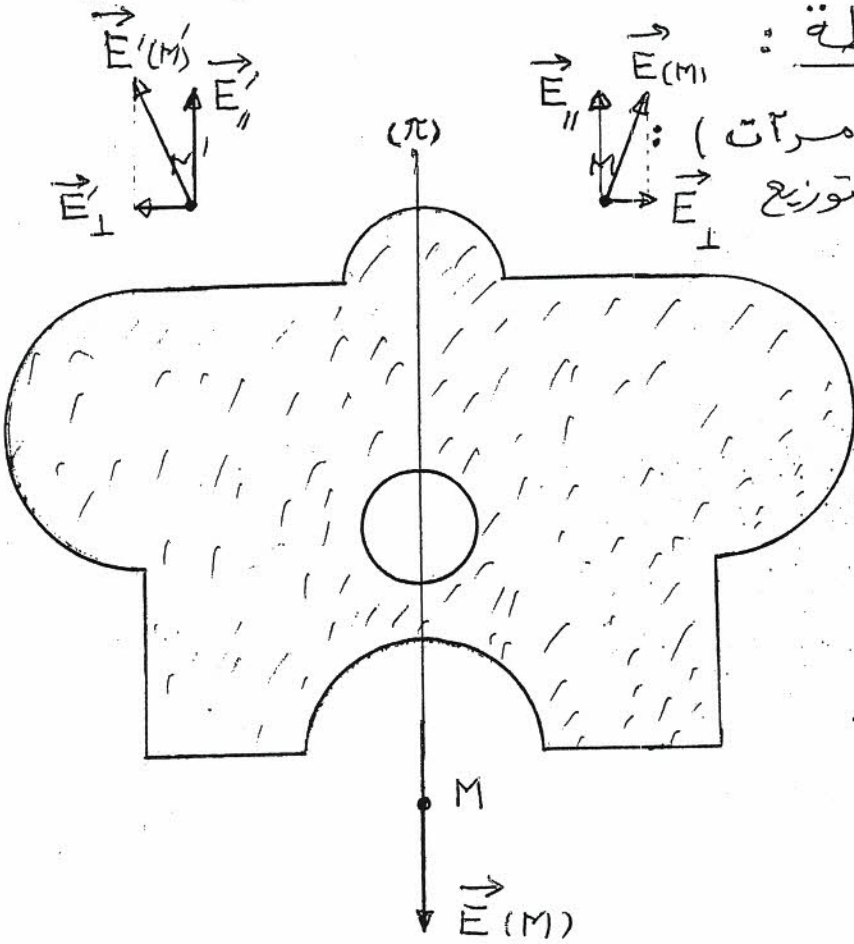
في حالة قرص لا منتهي نجد : $V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\left[+\infty - |z|\right]$

وهو غير معرّف ويرجع ذلك لوجود شحن في $+\infty$ وثابت الكمون أو مبدأ الكمون لا يمكن تحديده باعتبار: $V(\infty)=0$.

9-4- الحقل الكهربائي وقواعد التناظر :

الدراسة الكمية للظواهر الكهروساكنة يتطلب ربط الأفعال (الحقل ، الكمون ، الطاقة ...) بالأسباب التي أدت إلى ظهور التوزيعات الشحنية) . حساب هذه الظواهر عن طريق التكاملات هو في أحيان كثيرة معقد " وشاق " . هذا الحساب يمكن أن يصير بسيطاً وسهلاً عندما تكون هذه التوزيعات الشحنية تملك عناصر تناظر معينة .

- عناصر تناظر بسيطة :



* مستوي تناظر (مرآة) :

المستوى π يقسم التوزيع إلى نصفين متناظرين .

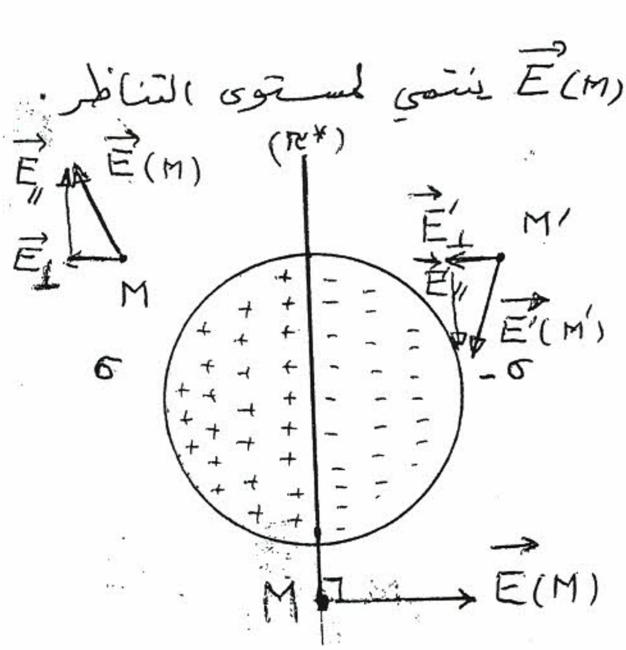
• في نقطتين M و M' متناظرتين بالنسبة لمستوى التناظر (π) $\vec{E}(M)$ و $\vec{E}'(M')$ متناظران بالنسبة لـ (π) .

$$\vec{E}_{/\!/}(M) = \vec{E}'_{/\!/}(M')$$

$$\vec{E}_{\perp}(M) = -\vec{E}'_{\perp}(M')$$

$\vec{E}_{/\!/}$ هو الحقل الموازي للمستوى (π) و $\vec{E}_{\perp}$ هي مركبة الحقل العمودية على (π) .

• في نقطة M تنتمي لمستوى التناظر ، $\vec{E}(M)$ ينتمي لمستوى التناظر .



* مستوى عكس تناظر :

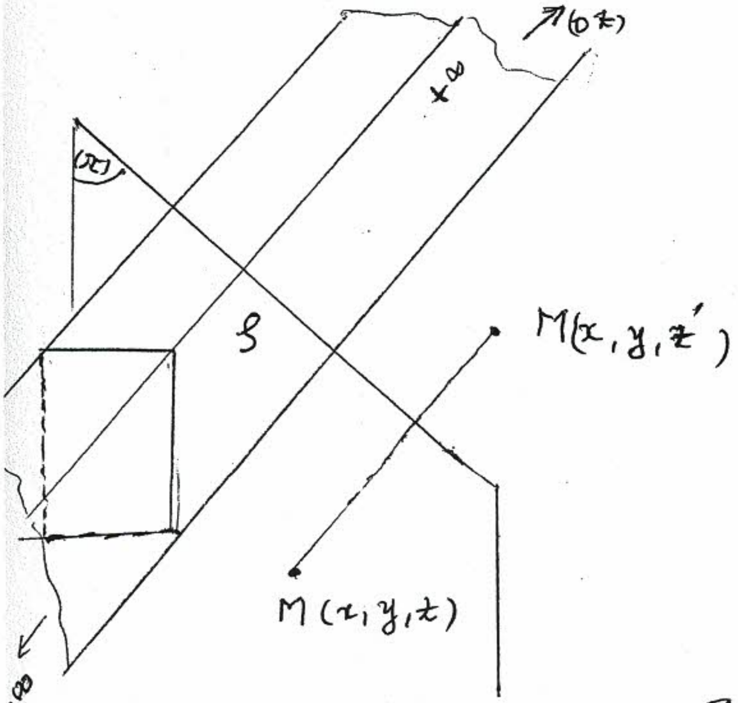
المستوي (π*) يقسم التوزيع الشحني إلى نصفين متناظرين من حيث الشكل ومتعاكسين في الشحنة الكهربائية .

• في نقطتين متناظرتين M و M' بالنسبة لـ (π^*)، $\vec{E}(M)$ و $\vec{E'}(M')$ عكس متناظرين.

• $\vec{E}_{\parallel}(M) = -\vec{E'}_{\parallel}(M')$ و $\vec{E}_{\perp}(M) = \vec{E'}_{\perp}(M')$.

• في نقطة M تنتمي إلى مستوى عكس التناظر (π^*)، $\vec{E}(M)$ عمودي على (π^*).

* اللاتغير بالانسحاب: عندما لا يتغير توزيع شحني بانسحاب Δz في الاتجاه الموازي للمحور (Oz)، فإن النقطتين $M(x,y,z)$ و $M'(x,y,z+\Delta z)$ تشاهدان نفس التوزيع الشحني. والحقل الكهربائي يكون نفسه عند النقطتين: $\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y,z+\Delta z)$



اللاتغير بالانسحاب في الاتجاه (Oz) يعني أن الحقل الكهربائي

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(M')$$

أو: $\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y,\cancel{z})$

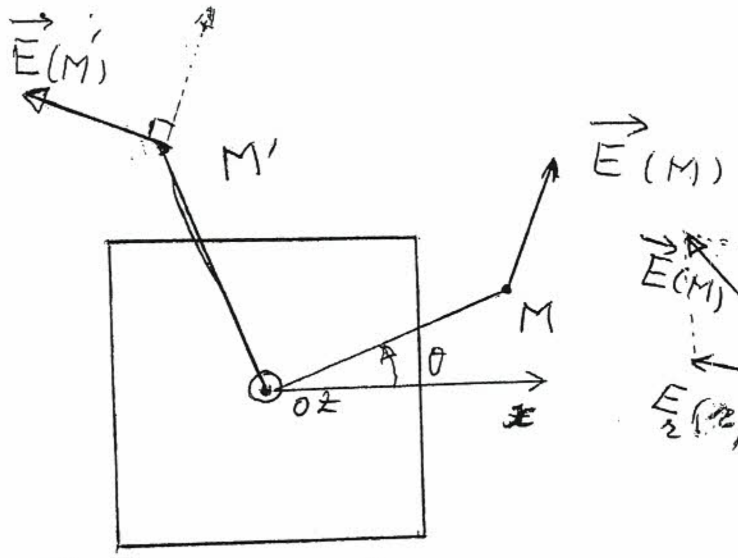
أي: $\vec{E}(x,y)$

يتعلق بالإحداثيتين x، و y فقط.

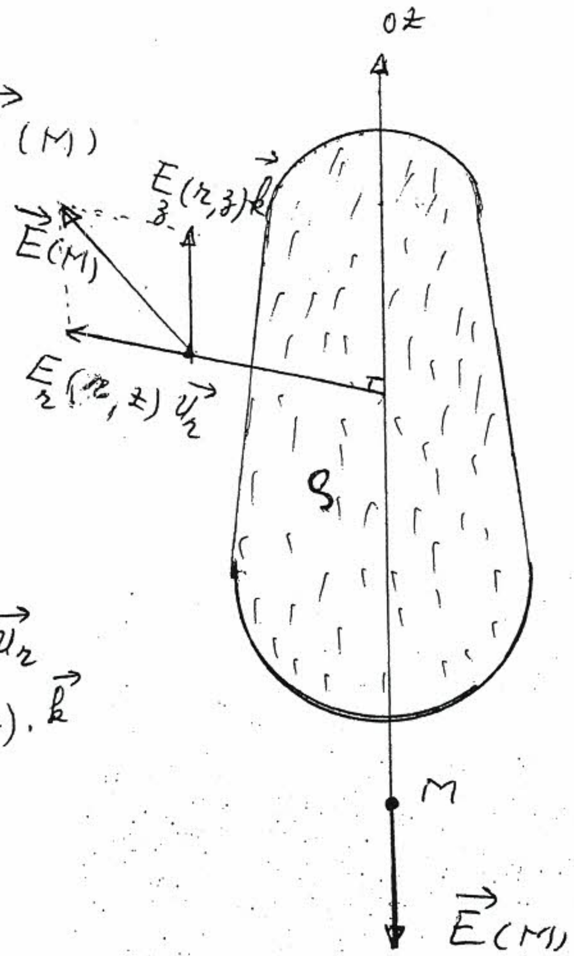
كل مستوى عمودي على المحور Oz هو مستوى تناظر أي الحقل $\vec{E}(x,y)$ ينتمي إلى هذا المستوى أو موازٍ له.

إذن الحقل في أي نقطة M هو من الشكل: $\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y) = E_x(x,y)\vec{i} + E_y(x,y)\vec{j}$

* اللاتغير بالدوران: عندما لا يتغير توزيع شحني بالدوران بزاوية $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ حول المحور Oz، فإن النقطتين M و M' التي نحصل عليها بالدوران ($M' = R(M)$) يشاهدان نفس التوزيع الشحني ولذلك فإن: $\vec{E}(M) = \vec{E}(M')$



$$\vec{E}(M) = \vec{E}(M')$$
$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{u}_r + E_z(r,\theta,z).\vec{k}$$



عندما تكون
زاوية α
كيفية أي
$\alpha \leftarrow n$
$\vec{E}(M) = \vec{E}($
$= E_r(r,z)\,\vec{u}$
$+ E_z(r,z$

عندما $M \in Oz$ ، $r = 0$ ، فإن $\vec{E}(M)$ محمول بالمحور Oz
أي : $\vec{E}(M) = E(z).\vec{k}$

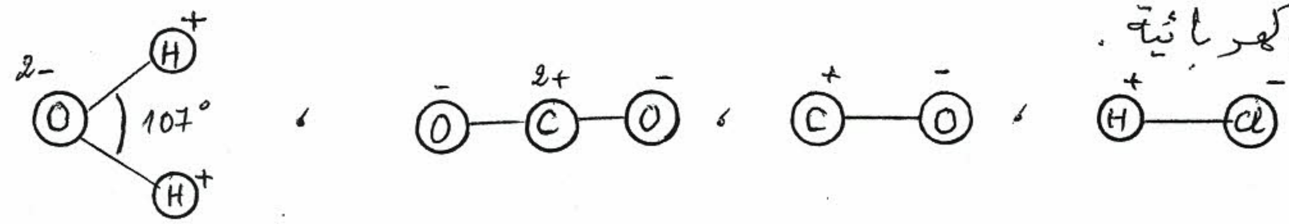
قانون كيري (Curie) : الفعل يملك على الأقل تناظر السبب
إذن : الحقل الكهربائي ، الكمون الكهربائي ، خطوط الحقل
الكهربائي ..... يملكون على الأقل تناظر التوزيع الكهربائي.

10. ثنائي القطب الكهربائي :

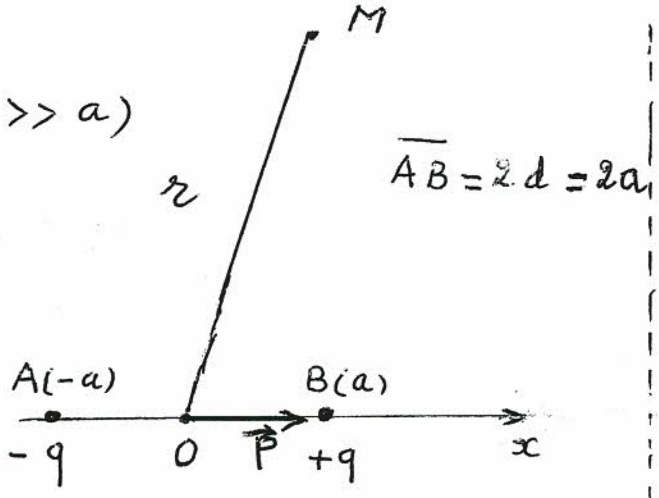
توجد في الطبيعة أنظمة كثيرة تكون في حالتها الاجمالية محايدة ولكن مركزي الشحن الموجبة والشحن السالبة غير متطابقين . مثل هذه الجملة يمكن تمثيلها، بتقريب أولي ، بشحنتين كهربائيتين نقطيتين $+q$ و $-q$ يوجدان على مسافة $d = 2a$ من بعضهما .

نسمي هذه الجملة من الشحن : ثنائي قطب كهربائي .

الجزيئات مثل HCl ، CO ، H_2O ، CO_2 تمثل نماذج لثنائيات أقطاب كهربائية .



تعريف : ثنائي القطب الكهربائي هو مجموعة شحنتين كهربائيتين نقطيتين متعاكستين $+q$ و $-q$ مفصولتين بمسافة $d=2a$ صغيرة جداً أمام المسافة r التي يبعد بها عن النقطة M حيث نلاحظ فعله .



ثنائي القطب الكهربائي

- عزم ثنائي القطب : نسمي عزم ثنائي القطب الكهربائي المقدار الشعاعي $\vec{P} = q \cdot \overrightarrow{AB}$ الموجه من $-q$ نحو $+q$. في النظام $S.I.$ وحدة $\vec{P}$ هي $[C.m]$ هذه الوحدة كبيرة جداً ولهذا نستعمل عادة وحدة الدوباي (Debye) لإعطاء عزم ثنائي القطب الخاص بالجزيئات : $1 Debye (D) = \frac{1}{3} . 10^{-29} C.m$.

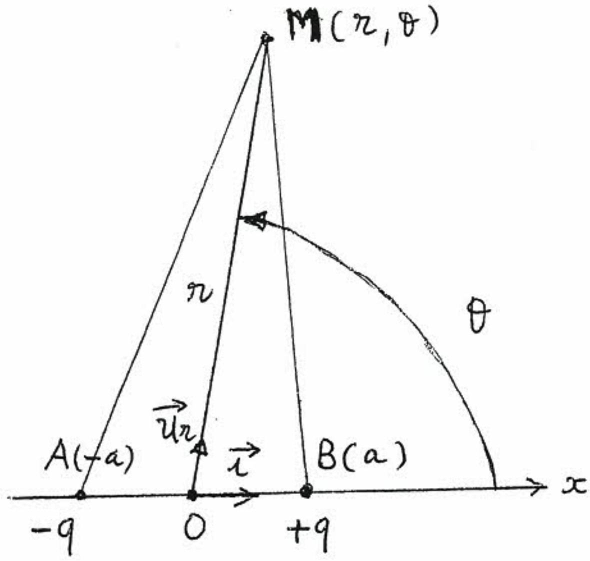
- عبارات الكمون و الحقل الكهربائيين في نقطة بعيدة عن ثنائي القطب :

لمعرفة الحقل الكهربائي لهذين الشحنتين في المحيط المجاور لهما يتطلب تحديد الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الناتج عنهما . في مثل هذه الحالة نطبق عادة قانون التطابق ونحسب مجموع الحقل الكهربائي $\vec{E}(M) = \vec{E}_{-q} + \vec{E}_{+q}$. في هذه الحالة ، حساب الحقل من الكمون

الكهربائي هو عملية اسهل من الطريقة المباشرة.

* الكمون الكهربائي :

يفضل استعمال جملة الاحداثيات القطبية $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ لحل المشكلة.



$(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \theta$ ، $\vec{OM} = r . \vec{u}_r$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{BM}\|} - \frac{1}{\|\vec{AM}\|}\right]$$

$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM} = a\vec{i} + r . \vec{u}_r$

$\vec{BM} = \vec{BO} + \vec{OM} = -a\vec{i} + r . \vec{u}_r$

$\vec{AM}^2 = a^2 + r^2 + 2ar\cos\theta$

$\vec{BM}^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta$

$$\|\vec{AM}\| = r . \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{1/2} , \|\vec{BM}\|^2 = r . \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a\cos\theta}{r}\right.$$

بما أن M بعيدة جدا عن ثنائي القطب $(r >> a)$ يمكن أن نكتب :

$$\|\vec{AM}\| = r\left(1 + \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{1/2} = r . \left[1 + \frac{1}{2} \times \frac{2a\cos\theta}{r}\right) \simeq r + a\cos\theta$$

$$\|\vec{BM}\| = r\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{1/2} = r\left[1 - \frac{1}{2} \times \frac{2a\cos\theta}{r}\right] \simeq r - a\cos\theta$$

بعدما نعوض نجد :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r - a\cos\theta} - \frac{1}{r + a\cos\theta}\right]$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{2a\cos\theta}{r^2 - a^2\cos^2\theta} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{2a\cos\theta}{r^2}$$

إذن :

$$\boxed{V(M) = \frac{2qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{P . \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} . \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

* الحقل الكهربائي :

$$\vec{E}(M) = -\vec{grad}\, V(M)$$

بما أن $V(M)$ يتعلق بـ r و θ فقط ، فإن مركبات الحقل $\vec{E}$ التي هي ليست معدومة هي فقط : E_r و E_θ .

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_z = E_\varphi = 0$$

وهذا منطقي لأن المستوي الذي يحتوي الشحن $+q$ و $-q$
والنقطة M هو مستوي تناظر $\Leftarrow$ $\vec{E}(M)$ ينتمي لهذا المستوي.
ويمكن أن نكتب:

$$\vec{E}(M) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{u}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\vec{u}_\theta$$

أو: $$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\cdot\vec{u}_r + \sin\theta\cdot\vec{u}_\theta\right]$$

العبارة الأخيرة يمكن أن نكتبها:

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\cdot\vec{r} - \vec{P}\cdot r^2}{r^5}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{P}\cdot\vec{u}_r)\cdot\vec{u}_r - \vec{P}}{r^3}\right]$$

* خطوط الحقل والسطوح المتساوية الكمون:

• خطوط الحقل: معادلة خطوط الحقل هي: $\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta}$

إذن: $$\frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta}\cdot d\theta = 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot d\theta$$

وعندما نكامل نجد: $$\ln r = 2\ln|\sin\theta| + k$$

أي: $$r = K\cdot\sin^2\theta$$

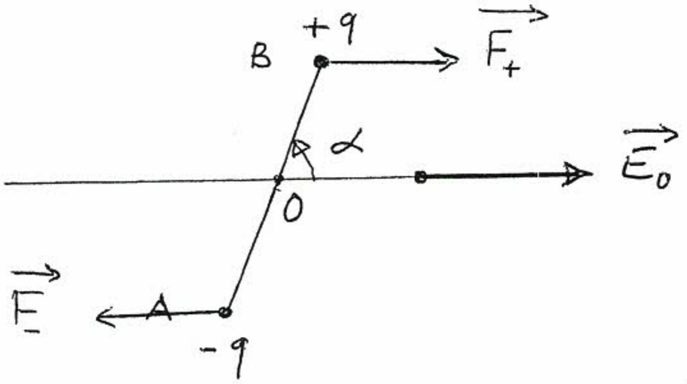
* السطوح المتساوية الكمون: $$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = V_0$$

إذن: $$r^2 = K'\cdot\cos\theta$$

شكل خطوط الحقل والسطوح المتساوية الكمون لثنائي القطب الكهربائي في الصفحة الأخيرة للأعمال الموجهة، السلسلة 2.

* ثنائي قطب كهربائي داخل حقل كهربائي خارجي منتظم :

نعتبر ثنائي قطب كهربائي في فضاء يوجد به حقلا كهربائيا منتظما $\vec{E}_0$



$$\vec{F}_+ = q\cdot\vec{E}_0$$
$$\vec{F}_- = -q\cdot\vec{E}_0$$

ثنائي القطب يوجد تحت تأثير مزدوجة قوتين لهما نفس الشدة
هذه المزدوجة تتميز بالعزم :

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \vec{OA}\wedge\vec{F}_- + \vec{OB}\wedge\vec{F}_+$$
$$= -\vec{OA}\wedge\vec{F}_+ + \vec{OB}\wedge\vec{F}_+$$
$$= (\vec{AO}+\vec{OB})\wedge\vec{F}_+ = \vec{AB}\wedge\vec{F}_+$$

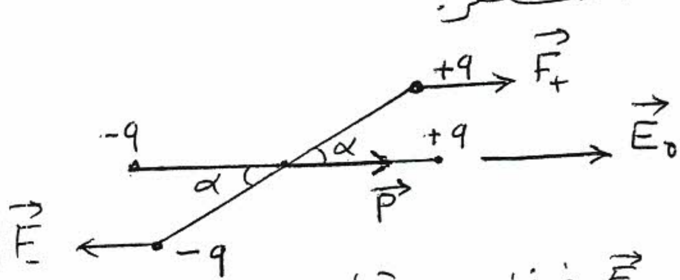
وعندما نعوض $\vec{F}_+$ بـ $q\cdot\vec{E}_0$ نجد :

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = q\cdot\vec{AB}\wedge\vec{E}_0 = \vec{P}\wedge\vec{E}_0$$

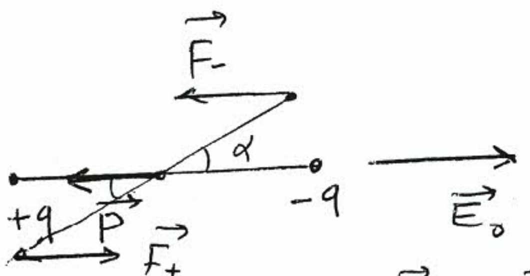
يكون ثنائي القطب الكهربائي في حالة توازن لما : $\vec{\mathcal{M}}_{/O}(\vec{F}) = \vec{0}$

أي : $\vec{P}\parallel\vec{E}_0$ ويتحقق ذلك لما : $\alpha = 0$ أو $\alpha = \pi$.

- $\alpha = 0$: $\vec{P}$ و $\vec{E}_0$ في نفس الاتجاه ونحصل على توازن مستقر.
- $\alpha = \pi$: $\vec{P}$ و $\vec{E}_0$ متعاكسان في الاتجاه ونحصل على توازن غير مستقر.



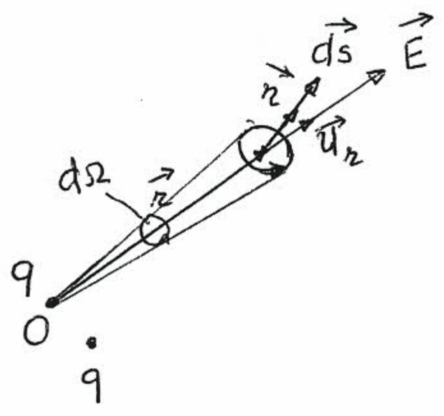
$\vec{P}$ و $\vec{E}_0$ في نفس الاتجاه :
عند إزاحة ثنائي القطب عن التوازن القوة $\vec{F}$ تعمل على إرجاعه إلى حالة التوازن.



$\vec{P}$ و $\vec{E}$ في الاتجاه المعاكس :
عند إزاحة ثنائي القطب عن التوازن القوة $\vec{F}$ لا تعمل على إرجاعه إلى حالة التوازن الابتدائية وإنما تدفعه إلى حالة التوازن المستقر.

12 - نظرية غوس (Gauss) :

نعتبر شحنة كهربائية نقطية q توجد في نقطة O من الفضاء. تدفق الحقل الكهربائي عبر مساحة عنصرية موجهة $\vec{ds}$ يكتب: $d\phi = \vec{E}.\vec{ds} = \vec{E}.\vec{n}.ds$



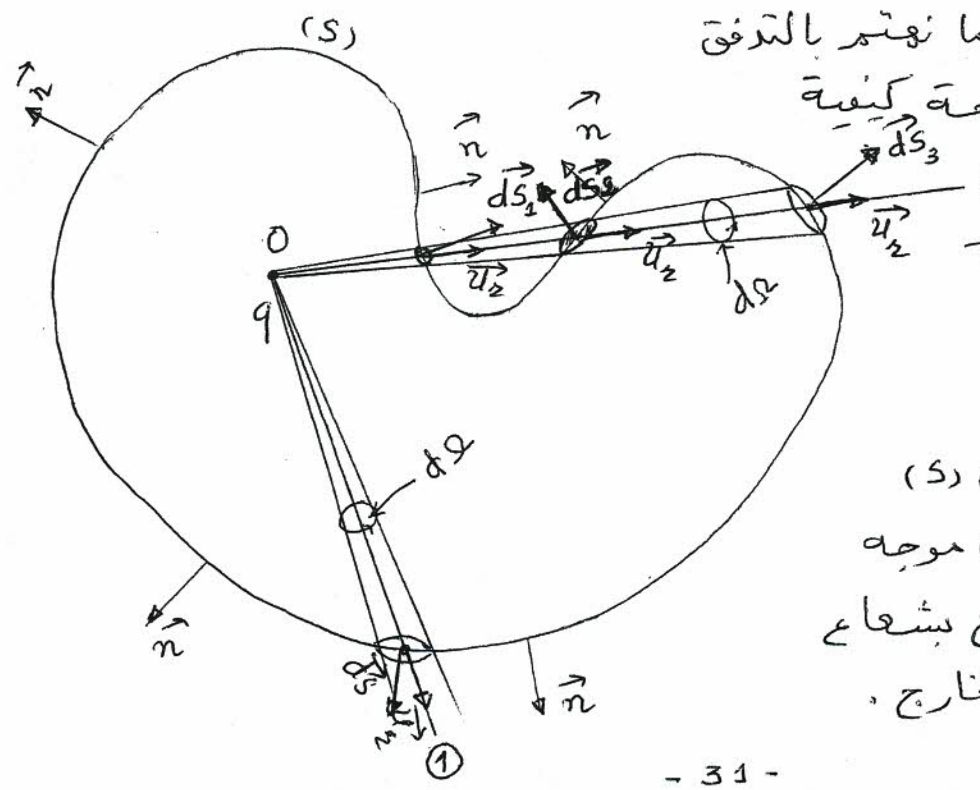
حيث $\vec{n}$ هو شعاع الواحدة العمودي على ds والموجه كما هو في الشكل عند الدوران في الاتجاه الموجب على ds. عند ما تكون $q>0$ ، $\vec{E}$ موجه في نفس الجهة من $\vec{n}$ و نحصل على تدفق موجب. عند ما تكون $q<0$ ، $\vec{E}$ و $\vec{n}$ لهما توجه معاكس بالنسبة لـ ds و $d\phi$ يكون سالب.

إنطلاقا من عبارة الحقل الكهربائي للشحنة q في موقع وجود ds لدينا:

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u_r}}{r^2}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{u_r}\cdot\vec{n}\cdot ds}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot d\Omega .$$

$\vec{u_r}$ هو شعاع الواحدة للشعاع $\vec{r}$ الرابط بين q والمساحة العنصرية ds و $d\Omega$ الزاوية المجسمة العنصرية التي نرى من خلالها ds إنطلاقا من O. العلاقة السابقة تعني أن تدفق الحقل $\vec{E}$ يتعلق مباشرة بالزاوية المجسمة التي نرى من خلالها ds.

لنرى الآن ما يحدث عند ما نهتم بالتدفق الكلي للحقل $\vec{E}$ عبر مساحة كيفية مغلقة (S).



من أجل ذلك نأخذ الحالة المبينة في الشكل.

لدينا شحنة q توجد داخل سطح مغلق كيفي (S) (يحيط بحجم V). (S) موجه في أي نقطة من السطح بشعاع واحدة $\vec{n}$ موجه نحو الخارج.

نعبر تدفق الحقل E في اتجاه الشعاعين ① و ② . في الاتجاه ① :
$d\phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega$ ، في الاتجاه ② ، الزاوية المجسمة $d\Omega$

تخترق السطح (S) في ثلاثة مواقع وفي إتجاهات مختلفة لـ $\vec{dS}$.

$$d\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\left[\frac{\vec{u_r}.\vec{n_1}.dS_1}{r_1^2} + \frac{\vec{u_r}.\vec{n_2}.dS_2}{r_2^2} + \frac{\vec{u_r}.\vec{n_3}.dS_3}{r_3^2}\right]$$

$$d\phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[d\Omega - d\Omega + d\Omega\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega$$

$\frac{\vec{u_r}.\vec{n_2}.dS_2}{r_2^2} = -d\Omega$ لأن $\vec{n_2}$ يوجد في الجهة المقابلة لاتجاه $\vec{u_r}$ الموجب. إذن : $d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega$ هي نتيجة عامة لأن أي شعاع ينطلق من الشحنة q التي توجد داخل السطح (S) يخترق هذا السطح عدد فردي من المرات. عندما تكون q خارج السطح (S) فإن أي شعاع ينطلق من q يخترق السطح (S) بعدد زوجي من المرات وبالتالي نحصل على : $d\phi = 0$.

وبما أن (S) هو سطح مغلق فإن : $\iint_{(S)} d\Omega = 4\pi$ لأنه يمثل الزاوية المجسمة التي نرى من خلالها كل الفضاء. ونحصل بذلك على العلاقة :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

وباعتبار قانون التطابق في حساب الحقل الكهربائي يمكن تعميم هذه النتيجة على توزيع شحني كيفي ونحصل على نظرية غوس التالية :

« تدفق الحقل الكهربائي عبر مساحة مغلقة في الفراغ يساوي $1/\varepsilon_0$ × الشحنة الكهربائية الكلية q_{int} التي توجد داخل المساحة المغلقة ». نعبر على نظرية غوس بالعلاقة :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حساب الحقل الكهربائي باستعمال نظرية غوس :

حساب الحقل الكهربائي باستعمال نظرية غوس هو على العموم ممكن فقط في حالة التوزيعات الشحنية ذات « تناظر عالٍ ». في مثل هذه الحالة تمثل نظرية غوس أداة حساب سهلة وسريعة للحقل الكهربائي. فبعد تحديد خصائص الحقل (الاتجاه والشدة) إنطلاقا من خصائص التناظر للتوزيع الشحني، نطبق نظرية غوس على مساحة مغلقة (مساحة أو سطح غوس) يتم اختيارها بحيث يتوافق شكلها مع تناظر التوزيع للحصول على شدة الحقل. الخطوات المتبعة لذلك هي :

1- اعتبار التناظر : انطلاقا من عناصر تناظر التوزيع الشحني يجب أن نحصل على الشكل العام لعبارة شعاع الحقل الكهربائي $\vec{E}$. من أجل ذلك :

* نستعمل مستويات التناظر، عكس التناظر، محاور التناظر للحصول على اتجاه الحقل.
* استعمال اللاتغير بالدوران أو الانسحاب للتوزيع الشحني من أجل تقليص تعلق الحقل بالاحداثيات المستعملة. ولهذا فإن اختيار جملة الاحداثيات المناسبة لحساب $\vec{E}$ هو أيضا أساسي.

2- اختيار مساحة أو سطح غوس (وهو سطح تخيلي) :

الشكل العام لعبارة شعاع الحقل $\vec{E}$ التي حصلنا عليه من الخطوة السابقة هو الذي يحدد كيفية اختيار سطح غوس المغلق والذي يجعل حساب التدفق $\oiint_{(s)} \vec{E}\,\vec{ds}$ أبسط وأسهل ما يمكن. هذا السطح يجب أن يكون مغلقا ويمر من النقطة M التي نريد حساب الحقل $\vec{E}$ عندها. يجب أن نختار سطح غوس بحيث يكون $\vec{E}$ عموديا عليه أو مماسيا له. في المناطق التي يكون $\vec{E}$ عموديا على سطح غوس (S_G) يجب أن تكون شدة $\|\vec{E}\|$ ثابتة.

$S_G = S_\perp + S_\parallel$ ، بحيث: S_G = سطح غوس المغلق.

$S_\perp$ = الجزء من S_G التي يكون $\vec{E}$ عموديا عليه

$S_{//}$ = الجزء من S_G التي يكون E موازيًا له .

تدفق الحقل $\vec{E}$ عبر سطح غوس S_G يكتب :

$$\oiint_{S_G} \vec{E}.\vec{ds} = \iint_{S_\perp} \vec{E}.\vec{ds} + \iint_{S_{//}} \vec{E}.\vec{ds}$$

لدينا :

$$\iint_{S_{//}} \vec{E}\,\vec{ds} = 0 \longrightarrow (\; \vec{ds} \perp \vec{E} \; : \text{لأن} \;)$$

$$\iint_{S_\perp} \vec{E}.\vec{ds} = \iint_{S_\perp} E.ds = E.\iint_{S_\perp} ds = E.S_\perp$$

$\vec{ds} // \vec{E}$ لأن   لأن $\|\vec{E}\|$ ثابتة على $S_\perp$

3 - تطبيق نظرية غوس على السطح المختار S_G :

$$E.\,S_\perp = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0 . S_\perp}$$

$$E(M) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0 . S_\perp}$$

ولهذا يجب أن نختار سطح غوس S_G بحيث M تنتمي إلى الجزء $S_\perp$.

الفصل الثالث : النواقل الكهربائية في حالة توازن.

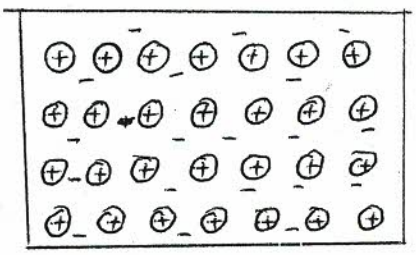
I - <u>النواقل والعوازل</u> : نعرف أن المادة مشكلة من شحن موجبة: البروتونات المتمركزة داخل أنوية الذرات ، وشحن سالبة : الالكترونات التي تشكل ما يعرف بالسحابة الالكترونية حول النواة التي يحدد إمتدادها في الفضاء مقاس الذرة .

نعرف أيضا أن الالكترونات يمكن تقسيمها إلى صنفين :

* إلكترونات المدارات الداخلية الشديدة الارتباط بالذرات .
* وإلكترونات المدارات الخارجية التي يمكن أن تنتقل من ذرة إلى أخرى عن طريق تشكيل الروابط الكيميائية التي بدورها تؤدي تكوين الجزيئات أو المادة الصلبة .

1 - <u>العوازل</u> : في المواد العازلة (لا تنقل الكهرباء) ، إلكترونات المدارات الخارجية تشكل روابط كيميائية تكافؤية (Liaisons covalentes) أو أيونية أو على العموم مختلطة تكافؤية - أيونية . في مثل هذه الروابط الالكترونات المشكلة لها لا تبتعد أبدا عن الذرة التي صدرت عنها وأقصى حد يمكن أن تصل إليه هي الذرات المجاورة للذرة الأصلية . فكل إلكترون يبقى متموقع في منطقة ضيقة جدا من الفضاء ولا يؤدي لأي ناقلية كهربائية .

2 - <u>النواقل</u> : في النواقل الكهربائية (المعادن) ، الالكترونات التي تحقق الترابط (الرابطة المعدنية) أو على الأقل جزء منها هي حرة في الانتقال بين الذرات داخل المادة وتسمى « الالكترونات الحرة » .
ويمكن إذن تمثيل معدن (ناقل كهربائي) بشبكة أيونية موجبة عائمة داخل غاز من الالكترونات الحرة .



يكافئ ≡

ناقل كهربائي
في حالة حياد
$Q = 0$

في حالة عدم وجود أي تأثير خارجي يكون المعدن في حالة حياد كهربائي
$(Q=0)$ لأن متوسط الشحنات الموجبة والسالبة متكافئ محليا.
نعرف الناقل الكهربائي «بجسم يمكن أن تتحرك شحن كهربائية
داخله تحت تأثير قوة مهما كانت ضعيفة »

I- خواص ناقل كهربائي في حالة توازن كهرساكن :

1- تعريف : «نقول أن ناقلا كهربائيا قد بلغ حالة التوازن الكهرساكن عندما
يتوقف الحركة المنتظمة للشحن الحرة داخل الناقل».
يمكن شرح خواص النواقل الكهربائية في حالة توازن باعتبار أن حركة
الالكترونات الحرة داخلها تتم بسهولة ولكن من دون أن تغادر المادة
عبر السطح الخارجي .

- الحقل الكهربائي داخل ناقل في حالة توازن : عند وجود حقل كهربائي $\vec{E}$
داخل الناقل ، كل إلكترون يصير خاضعا لقوة كهربائية : $\vec{F} = -e.\vec{E}$
مما يؤدي إلى حدوث حركة جماعية منسقة للالكترونات الحرة
(تيار كهربائي مؤقت) وتتوقف هذه الحركة عندما يصبح الناقل
في حالة توازن أي : $\vec{E} = \vec{0}$. إذن : « الحقل الكهربائي داخل ناقل
في حالة توازن معدوم : $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ » .

- الكمون الكهربائي : بما أن الحقل $\vec{E}_{int}$ داخل ناقل في حالة توازن
معدوم فإن الكمون الكهربائي داخل الناقل ثابت : $\vec{E}_{int} = \vec{0} \Rightarrow V = cte$

- السطح الخارجي للناقل : بما أن الكمون الكهربائي لناقل في حالة توازن
ثابت ، فإن السطح الخارجي للناقل هو إذن متساوي الكمون ، والحقل
الكهربائي من الجهة الخارجية للناقل عندما لا يكون معدوما هو عمودي
على سطح الناقل وهذا منطقي لأنه لو كان للحقل $\vec{E}$ مركبة مماسية
لسطح الناقل فإن الشحن الحرة تبقى في حالة حركة على الناقل ولا تحصل
في حالة توازن .

5 ـ الكثافة الشحنية الحجمية ρ داخل ناقل في حالة توازن : باستعمال نظرية التباعد يمكن أن نكتب نظرية غوص بالنسبة لسطح الناقل :

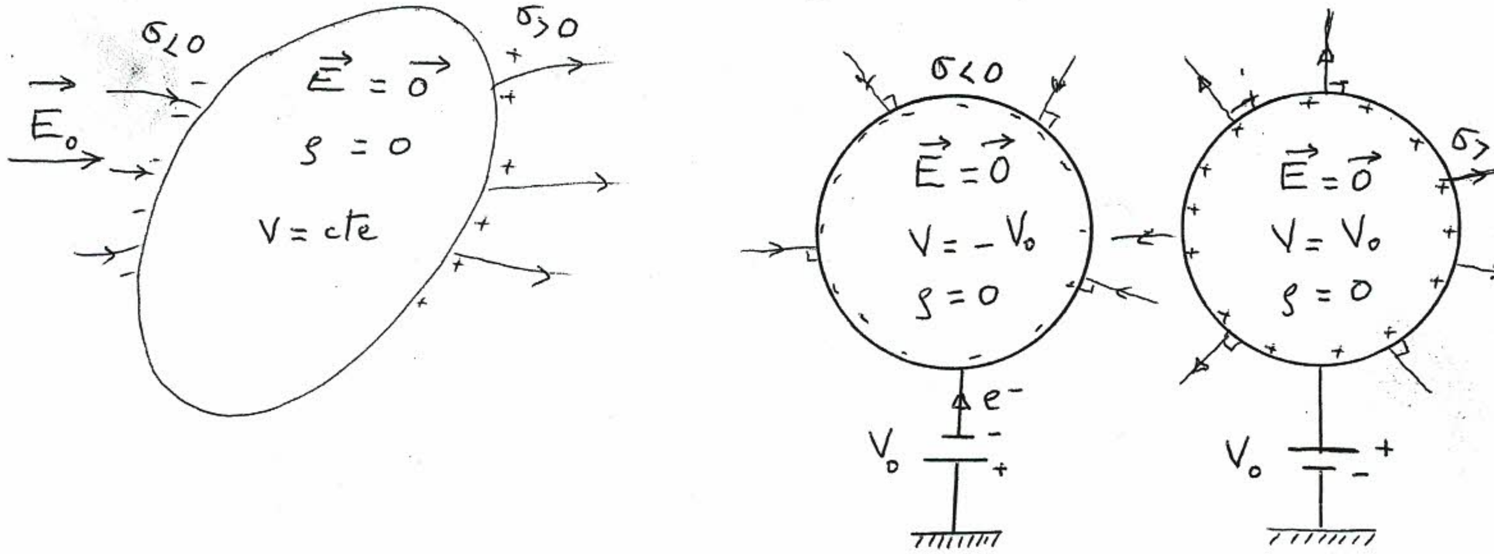
$$\iiint_{(V)} div\vec{E}\,.\,dV = \iiint_{(V)} \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,.\,dV \quad \Leftarrow \quad \iint_{(S)} \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

حيث V هو حجم الناقل . و نجد : $div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

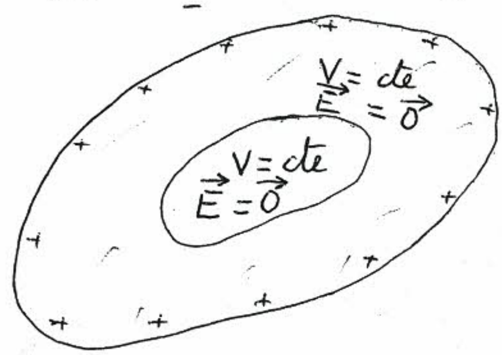
وبما أن $\vec{E}$ معدوم داخل ناقل في حالة توازن فإن : $\rho = 0$ و $Q_{int} = 0$

إذن : " الكثافة الشحنية الحجمية ρ داخل ناقل كهربائي في حالة توازن معدومة . "

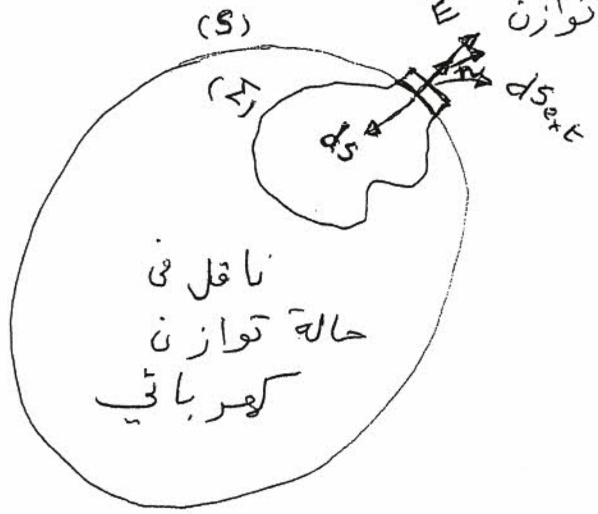
6 ـ توزيع الشحن في ناقل : بما أن $\rho = 0$ داخل ناقل ، فإن ظهور شحن كهربائية في ناقل تتم فقط على السطح والكثافة الشحنية التي يملكها الناقل هي فقط سطحية (σ) . يمكن إظهار أو خلق شحن على الناقل بربطه إلى قطب مولد كهربائي أو وضعه داخل حقل $\vec{E}_0$ خارجي ناتج عن توزيع آخر .



7ـ الكمون داخل تجويف في ناقل كهربائي ثابت والشحنة التي تظهر على الناقل هي فقط على السطح الخارجي



٤- الحقل الكهربائي بالجوار الخارجي لناقل، نظرية كولون :



بما أن السطح الخارجي لناقل في حالة توازن هو سطح متساوي الكمون فإن الحقل الكهربائي في نقطة M قريبة جداً من سطح الناقل (S) يكون عمودياً عليه.

نعتبر مساحة مغلقة (Σ) مشكلة في الجهة الخارجية من الناقل من أنبوبة الحقل التي ترتكز على مساحة عنصرية ds من (S) ومساحة ds_{ext} موازية لـ ds وقريبة جدا منها بحيث يمكن اعتبار $ds = ds_{ext}$ والحقل $\vec{E}$ يبقى عمودي على ds_{ext} مثل ds. شكل السطح (Σ) داخل الناقل كيفي. عندما نطبق نظرية غوس على السطح (Σ) نكتب :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}.\vec{ds} = \iint_{(ds_{ext})} \vec{E}.\vec{ds}$$

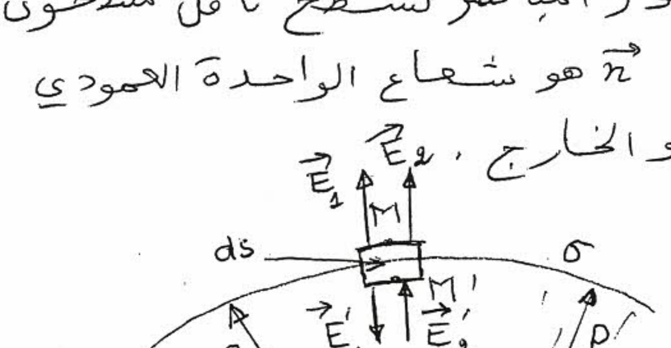
لأن $\vec{E}$ من الجهة الداخلية للناقل معدوم و $\vec{E}$ مماسي دائما للمساحة الجانبية لأنبوبة الحقل :

$$\oiint_{(ds_{ext})} \vec{E}.\vec{ds} = E.\,ds_{ext} = E.ds = \frac{\sigma.ds}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

إذن بجوار الناقل :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\vec{n}$$

نظرية كولون : الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بالجوار المباشر لسطح ناقل مشحون هو : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\vec{n}$. $\vec{n}$ هو شعاع الواحدة العمودي على سطح الناقل وهو موجه نحو الخارج.



الضغط الكهروساكن :

نعتبر نقطتين M و M' قريبتين جدا من سطح ناقل مشحون بكثافة شحنية سطحية σ

M توجد خارج الناقل و M′ في داخله. نأخذ مساحة عنصرية ds على سطح الناقل توجد بين النقطتين M و M′.

ليكن $\vec{E}_1$ الحقل الناتج عن الشحنة σds في M و $\vec{E}_2$ الحقل الناتج عن باقي الشحن الأخرى على سطح الناقل. $\vec{E}_1'$ و $\vec{E}_2'$ هما على التوالي الحقلان الناتجان في M′ عن σds و باقي الشحن الأخرى. لدينا العلاقات التالية:

• $\vec{E}_2(M) = \vec{E}_2'(M')$ لأن M و M′ قريبتان جداً من بعضهما.

• $\vec{E}_1'(M') = -\vec{E}_2'(M')$ لأن $\vec{E}$ معدوم داخل ناقل.

• $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1'(M')$ لأن M و M′ متناظرتان بالنسبة لـ ds

ونستنتج من هذه العلاقات أن: $\vec{E}_1(M) = \vec{E}_2(M)$ أي مساهمة باقي شحن الناقل في الحقل الكلي $\vec{E}(M)$ مساوية لمساهمة الشحنة σds الموجودة على ds.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = 2\,\vec{E}_2(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\vec{n}$$

ونستنتج أن الحقل الناتج عن جميع الشحن التي توجد على الناقل ماعدا التي توجد على ds وبجوار الناقل في M هو:

$$\vec{E}_2 = \vec{E}/2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{n}$$

الشحنة الكهربائية $dq = \sigma ds$ التي توجد على ds تتعرض لقوة كهربائية $d\vec{F}$ من طرف الحقل $\vec{E}_2$ بحيث: $d\vec{F} = dq\cdot\vec{E}_2$

أي: $d\vec{F} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{n}\cdot\sigma ds$ أو: $\frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{n}$

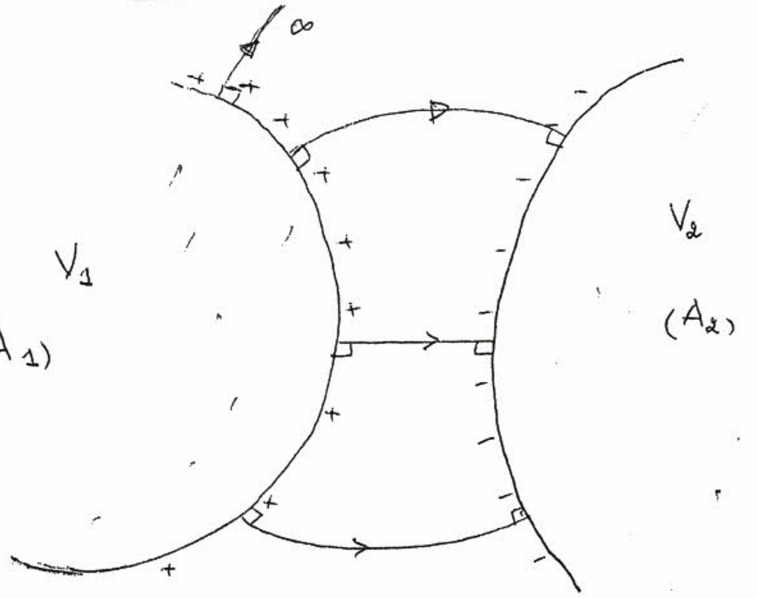
إذن مهما كانت إشارة σ فإن $d\vec{F}$ عمودية على سطح الناقل وموجهة نحو الخارج. هذه العبارة تعطي ما يسمى بالضغط الكهروساكن P الذي تتعرض كل نقطة من سطح الناقل:

$$P = \frac{\|d\vec{F}\|}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

هذا الضغط هو عادة ضعيف فلا يمكنه أن يشوه سطح الناقل أو ينزع شحنا من سطح الناقل.

- مجموعة من النواقل في حالة توازن :

1 - كيفية توزيع خطوط الحقل بين مجموعة من النواقل :

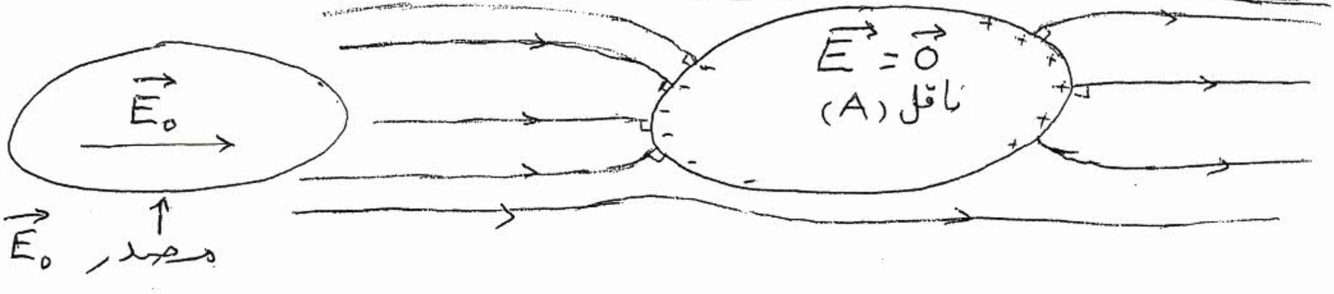


$V_1 > V_2$

زيادة على الخواص التي رأيناها في حالة الناقل الوحيد ، فإن خطوط الحقل بين مجموعة من النواقل تأخذ عادة شكلا معقداً ، غير أنه يمكن أن نأخذ فكرة بسيطة عن كيفية توزيعها وفقا للشروط التالية :

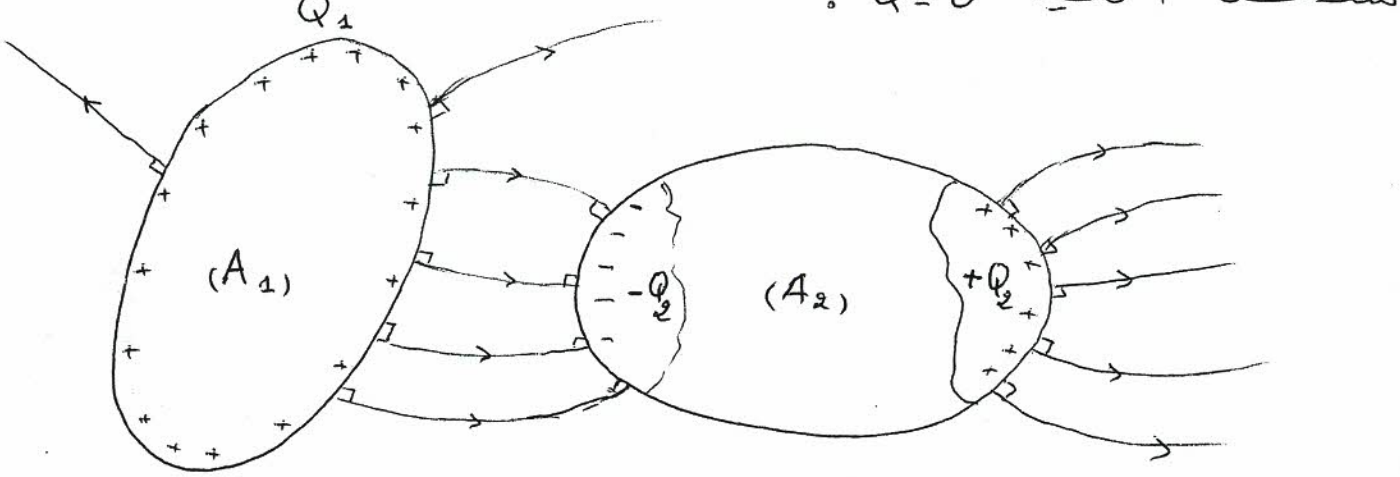
* خطوط الحقل تخرج أو تدخل عمودية على سطح كل ناقل وتتجه دائما من الشحن الموجبة نحو الشحن السالبة .
* خطوط الحقل التي تنطلق من سطح ناقل في موقع يملك كثافة بشحنية موجبة تذهب إلى ∞ + (V = 0) أو فوق ناقل آخر يملك كمونا أصغر .
* الكمون الكهربائي يتناقص على طول خط الحقل ($V_1 > V_2$)
* لا يمكن لخط حقل أن ينغلق على نفس الناقل .
* ناقل معزول في الفضاء يملك شحنة سطحية لها نفس الإشارة .

التأثير المتبادل بين النواقل :



نعتبر ناقل معزول في حالة حياد كهربائي (Q = 0) . نضع هذا الناقل داخل حقل كهربائي منتظم $\vec{E_0}$ ، فتتحرك شحنه الحرة تحت تأثير

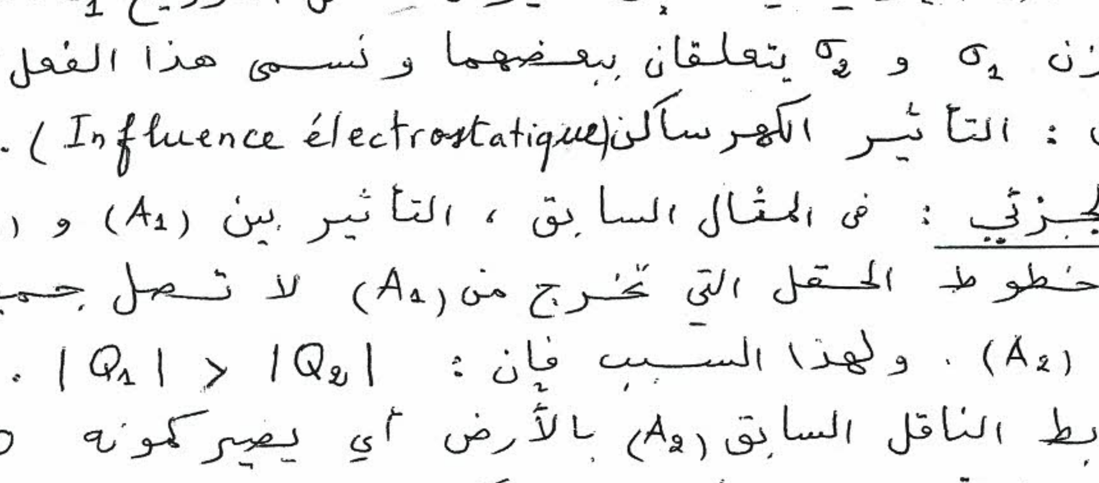
$\vec{E}_0$ إلى أن يصير الحقل $\vec{E}$ داخل الناقل معدوما ($\vec{E} = \vec{0}$).
و نحصل بذلك على ناقل مستقطب (قطب+ ، قطب-) كنتيجة لظهور توزيع شحني سطحي σ على الناقل غير منتظم مع بقاء الشحنة الكلية $Q = 0$.



نعتبر الآن حالة وجود ناقل (A_1) مشحون بكثافة شحنية σ_1 بجوار ناقل آخر (A_2) في حالة حياد . الناقل (A_2) يشحن بكثافة سطحية σ_2 غير منتظمة ناتجة عن الحقل الكهربائي للناقل (A_1) . ظهور التوزيع σ_2 في محيط الناقل (A_1) يؤدي أيضا إلى تغير في شكل التوزيع σ_1 . عند حدوث التوازن σ_1 و σ_2 يتعلقان ببعضهما و نسمي هذا الفعل المتبادل بين الناقلين : التأثير الكهرساكن (Influence électrostatique) .

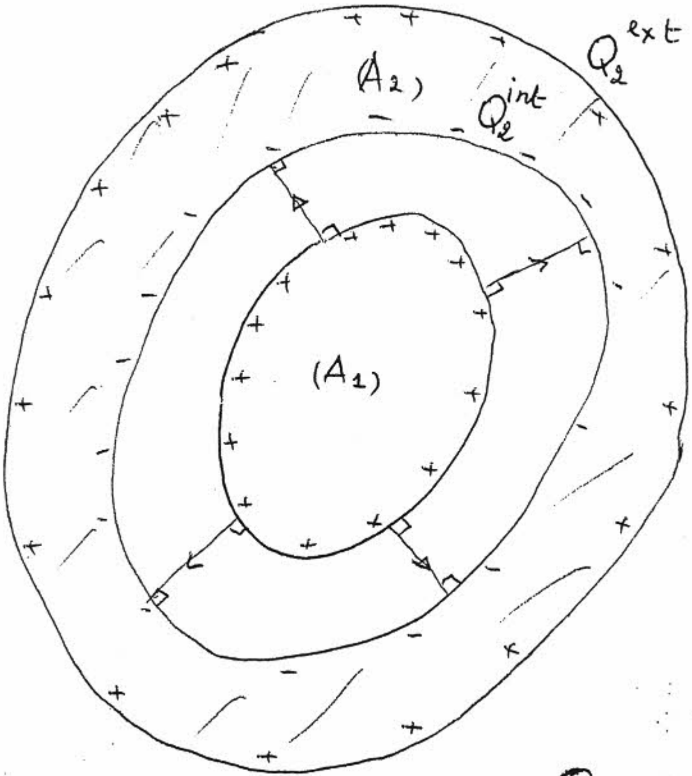
* التأثير الجزئي : في المثال السابق ، التأثير بين (A_1) و (A_2) جزئي لأن خطوط الحقل التي تخرج من (A_1) لا تصل جميعها على سطح (A_2) . ولهذا السبب فإن : $|Q_1| > |Q_2|$.

عندما نربط الناقل السابق (A_2) بالأرض أي يصير كمونه $V_2 = 0$ فإن التوزيع الشحني على سطحه يصبح كما يلي :

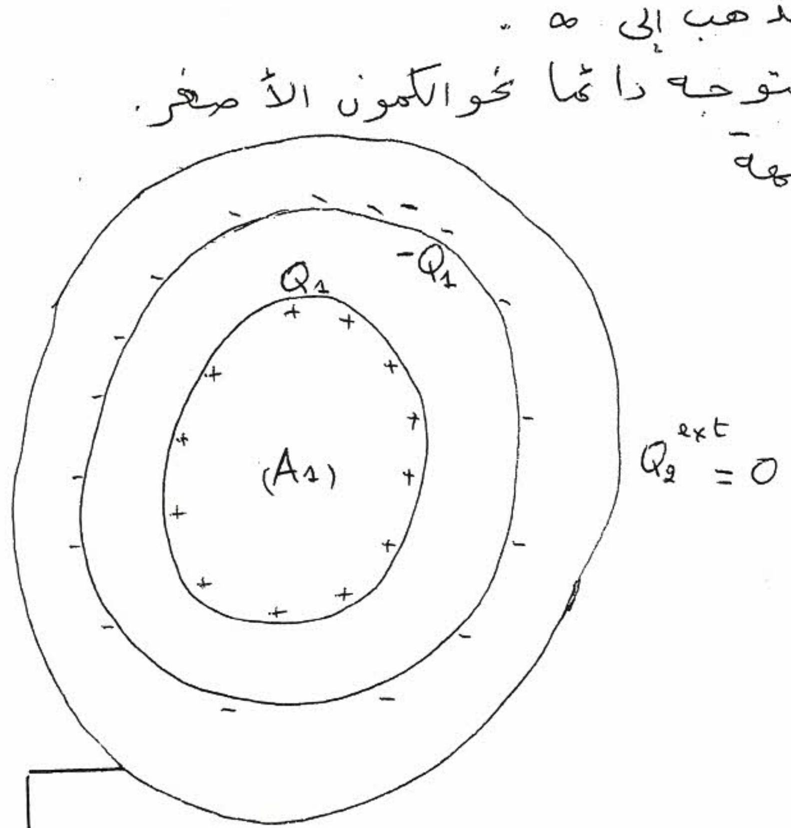


لا يمكن أن توجد شحن على الجهة الأخرى من الناقل (A_2) لأنه لا يمكن أن تذهب خطوط الحقل من كمون $V_2 = 0$ إلى ∞ حيث $V(\infty) = 0$.

<u>التأثير الكلي</u>: يكون التأثير بين الناقلين (A_1) و (A_2) كليا عندما
جميع خطوط الحقل التي تنطلق من (A_1) تصل إلى (A_2).
عمليا، يمكن الحصول على مثل هذا التأثير بوضع الناقل (A_1) داخل
الناقل (A_2). في هذه الحالة تظهر
شحنة $Q_2^{int} = -Q_1$ على السطح
الداخلي لـ (A_2) وكيفما كانت
وضعية (A_1) داخل (A_2).
الشحنة الكلية Q_2 للناقل (A_2)
هي بكل بساطة: $Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext}$
أو: $Q_2 = -Q_1 + Q_2^{ext}$
ونحصل على: $Q_2^{ext} = Q_1 + Q_2$

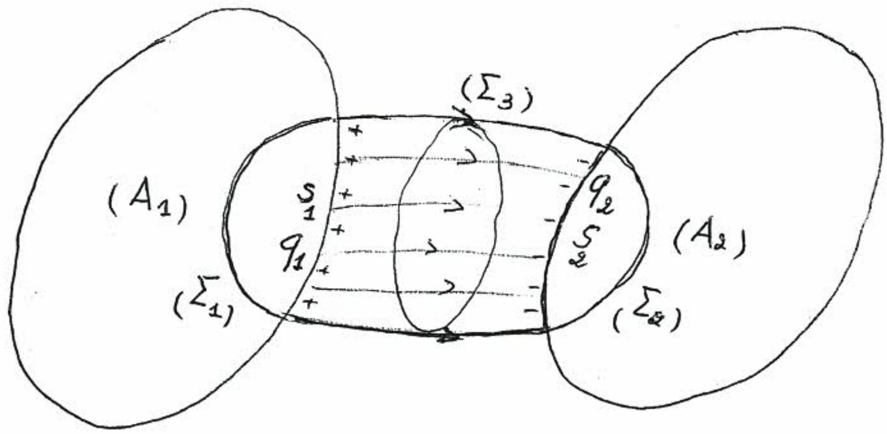


عند ربط (A_2) بالأرض $(V_2 = 0)$
فإن: $Q_2^{ext} = 0$ وتصير: $Q_2 = -Q_1$.
$Q_2^{ext} = 0$ لأنه لا توجد خطوط للحقل تنطلق
من (A_2) من الجهة الخارجية وتذهب إلى ∞.
$V_2 = V(\infty) = 0$ وخطوط الحقل تتوجه دائما نحو الكمون الأصغر.
لا توجد خطوط للحقل من الجهة
الخارجية للناقل (A_2) $\Leftarrow$ عدم
وجود شحنة كهربائية على
السطح الخارجي للناقل (A_2).



3- نظرية العناصر المتقابلة : Théorème des éléments Correspondants

نعتبر ناقلان كهربائيان (A_1) و (A_2) في حالة تأثير متبادل.
S_1 مساحة من (A_1) و S_2 مساحة من (A_2) بحيث أنبوبة الحقل التي تنطلق من (A_1) وترتكز على S_1 تتقاطع مع (A_2) في S_2.



- يمكن أن نبرهن بسهولة أن S_1 و S_2 يحملان شحن متساوية ومتعاكسة : $q_1 = -q_2$. يكفي لذلك أن نطبق نظرية غوس على المساحة : $(\Sigma) = (\Sigma_1) + (\Sigma_2) + (\Sigma_3)$ حيث (Σ_1) هو الجزء من (Σ) داخل (A_1) و (Σ_2) داخل (A_2) و (Σ_3) المساحة الجانبية لأنبوبة الحقل :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_1+q_2}{\varepsilon_0} = 0$$

تدفق $\vec{E}$ عبر (Σ) معدوم لأن $\vec{E}=\vec{0}$ داخل الناقلين ومماسي للمساحة الجانبية لأنبوبة الحقل (Σ_3) . إذن : $q_1 = -q_2$. S_1 و S_2 تسميان العناصر المتقابلة.

- ملاحظات : • ليس لكل عناصر المساحة على (A_1) عناصر متقابلة على (A_2) لأنه يمكن أن توجد خطوط للحقل تنطلق من (A_1) وتنتهي إلى $+\infty$.

• عندما تكون شحنتا ناقلين متعاكستين ومتساويتين $(Q_1 = -Q_2)$ فإن جميع خطوط الحقل التي تنطلق من الأول تصل إلى الثاني (حالة تأثير كلي بين الناقلين).

• عندما تكون مجموعة من النواقل في حالة توازن ومجموع شحنها معدوم فإن جميع خطوط الحقل التي تنطلق من سطح ناقل تصل إلى سطح ناقل آخر ولا يوجد خط حقل يذهب إلى $+\infty$.

قدرة السطوح الحادة : Pouvoir des pointes

قدرة السطوح الحادة تشير إلى النتيجة التجريبية التي تظهر أن الحقل الكهربائي بجوار منطقة حادة من سطح ناقل مشحون في حالة توازن يملك دائما شدة عالية.

نعني بالمنطقة الحادة، منطقة من السطح ذات إنحناء عالي أو نصف قطر انحناء صغير. هذه النتيجة تعني أن الكثافة الشحنية السطحية σ، باعتبار قانون كولون، هي عالية في المناطق الحادة.

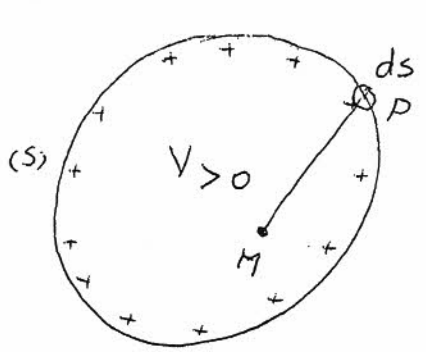
يمكن أن نبين ذلك باستعمال كرتين مشحونتين لهما قطر إنحناء مختلف وموصولتين بسلك ناقل وبعيدتين جدا عن بعضهما بحيث يمكن اعتبار الكرتين معزولتين.

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{\iint \sigma_1\, ds}{R_1} = \frac{\iint \sigma_2\, ds}{R_2}$$

أي : $\sigma_1 \cdot R_1 = \sigma_2 \cdot R_2$ أو $\sigma_1 / R_2 = \sigma_2 / R_1$

وهذا يعني أنه كلما كان نصف قطر الانحناء صغير كلما كانت الكثافة الشحنية كبيرة.

5- السعة الكهربائية لناقل معزول :



ليكن ناقل كهربائي معزول مشحون بكثافة شحنية σ نتيجة وضعه تحت كمون V.

الكمون V في اي نقطة من الناقل M تكتب:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)} \frac{\sigma\, ds}{PM}$$

حيث P موقع مساحة عنصرية كيفية ds على سطح الناقل.

الشحنة الكلية Q التي يحملها الناقل هي : $Q = \iint_{(S)} \sigma . ds$

عند مضاعفة الكثافة σ بمقدار a ثابت ، بحيث تصير $\sigma' = a\sigma$ فإن شحنة الناقل تصير $Q' = aQ$ و كمونه $V' = a.V$.
ونحصل إذن على حالة توازن جديدة للناقل معرفة تماما بالحالة (V', Q') .
ونلاحظ إذن أن أي حالة توازن كهرساكن لناقل معزول (V, Q) تملك دائما نفس النسبة :

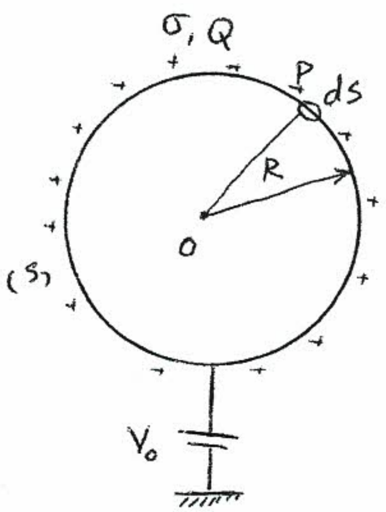
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}$$

هذه الخاصية للناقل ترجع إلى العلاقة الخطية بين Q و V بدلالة σ .
المقدار : $C = Q/V$ يسمى السعة الكهربائية لناقل معزول في حالة توازن حيث Q هي الشحنة الكلية للناقل الموضوع تحت الكمون V .
وحدة السعة هي الفراد (Farad)

$$1 \text{ Farad} = 1 \text{ C} / 1 \text{ V}$$

* السعة C لناقل هي دائما مقدار موجب ولا تتعلق إلا بالشكل الهندسي للناقل.
* الوحدات المستعملة عادة لإعطاء قيمة السعة C هي : μF ، nF أو pF حيث : $1\mu F = 10^{-6} . F$ ، $1nF = 10^{-9} F$ ، $1pF = 10^{-12} . F$.

تطبيق : أحسب سعة ناقل كروي نصف قطره R .



عندما نضع الناقل تحت كمون V_0 فإنه يشحن بكثافة شحنية σ . الشحنة الكلية Q على سطح الناقل هي : $Q = \iint_{(S)} \sigma \, ds$

لدينا :

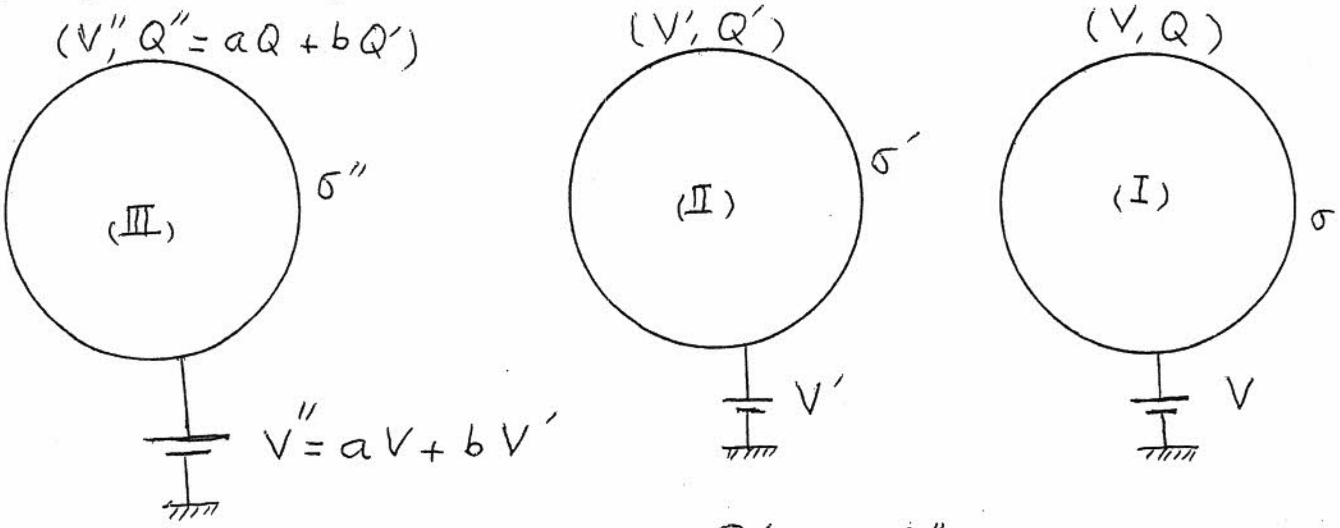
$$V_0 = V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\sigma . ds}{PO}$$

وبما أن $PO = R \Leftarrow V_0 = V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{1}{R} \iint \sigma ds$

أي : $V(0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} . \frac{1}{R} \Leftarrow C = \frac{Q}{V_0} = 4\pi\varepsilon_0 R$

6 - مطابقة عدة حالات توازن :

نعتبر حالات التوازن (V, Q) و (V', Q') لناقل كهربائي .

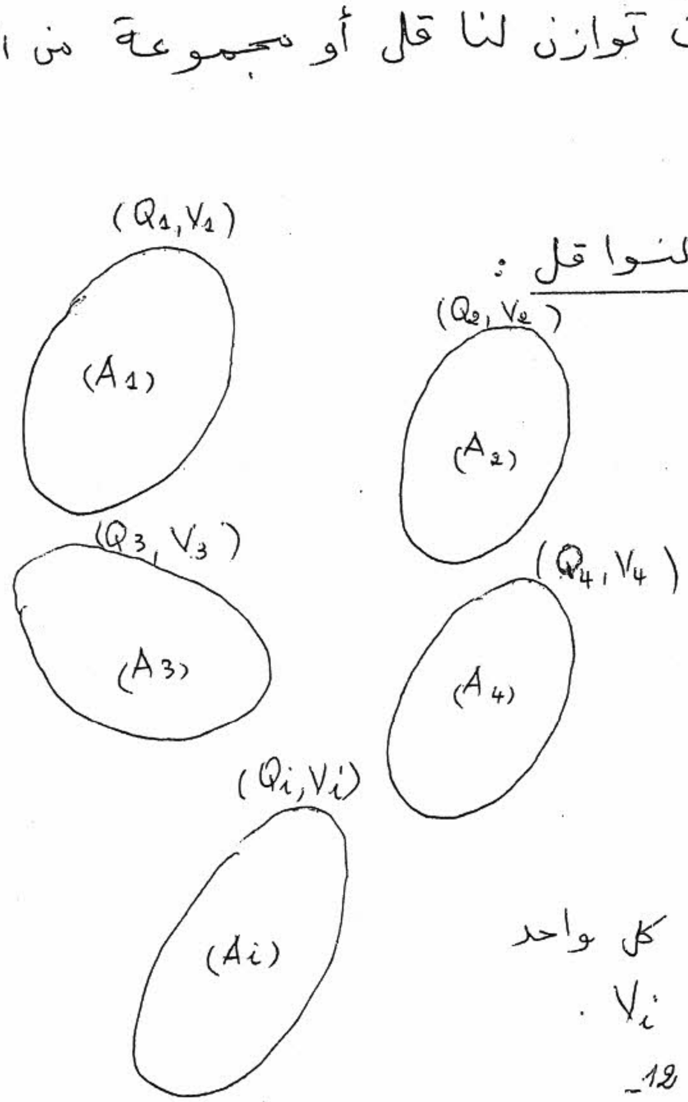


$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} = \frac{Q''}{V''}$$

بسبب العلاقة الخطية بين Q و V بدلالة الكثافة السطحية σ فإن أي حالة توازن جديدة للناقل بكثافة ; $\sigma''=a\sigma+b\sigma'$ تستلزم : $Q''=aQ+bQ'$ و $V''=aV+bV'$

ونستنتج أن مطابقة حالات توازن لناقل أو مجموعة من النواقل هي أيضا حالة توازن جديدة .

معاملات التأثير لمجموعة من النواقل :



وجود مجموعة من النواقل قريبة ن بعضها يؤدي إلى حدوث تأثير تبادل بينهم. عند حدوث توازن ، شحنة كل ناقل تتعلق لشحن التي تحملها النواقل الأخرى ، لسعة والمواقع النسبية لكل قل.

نبر مجموعة من النواقل (A_i) يحمل كل واحد ها شحنة Q_i ويوجد تحت كمون V_i .

باعتبار مبدأ تطابق حالات التوازن ، يمكن أن نكتب التوزيع الشحني السطحي الذي يظهر على الناقل (A_i) من الشكل :

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{1j} = \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \cdots + \sigma_{1n}$$

حيث σ_{1j} هي الكثافة الشحنية التي تظهر على (A_1) عندما تكون جميع النواقل عند الكمون $V = 0$ ماعدام الناقل (A_j) الذي يوجد عند الكمون V_j .

الشحنة الكلية Q_1 للناقل (A_1) نكتب :

$$Q_1 = \iint_{(S_1)} \sigma_1 \, ds = \sum_{j=1}^{n} \iint_{(S_1)} \sigma_{1j} \, ds = Q_{11} + Q_{12} + \cdots + Q_{1n}$$

معرفة Q_1 تتطلب إذن معرفة n حالة توازن كهربائي .

نعتبر الحالة التي تكون فيها جميع النواقل (A_i) عند الكمون $V_i = 0$ ماعدا الناقل (A_1) عند الكمون V_1 $(V_i = 0 \,،\, V_1 \neq 0)$.

لدينا إذن :

$$\begin{cases} Q_{11} = C_{11} V_1 \\ Q_{21} = C_{21} V_1 \\ Q_{31} = C_{31} V_1 \\ \vdots \\ Q_{n1} = C_{n1} V_1 \end{cases}$$

• Q_{11} هي الشحنة التي تظهر على (A_1) بسبب الكمون V_1 مع وجود النواقل الأخرى ، C_{11} ← هي سعة الناقل (A_1) مع وجود النواقل الأخرى

• بسبب التأثير المتبادل بين النواقل يظهر توزيع σ_{j1} على سطوح جميع النواقل الأخرى الأخرى (A_j) وكنتيجة لنظرية العناصر المتقابلة الشحنة Q_{j1} التي تظهر على (A_j) هي معاكسة للشحنة التي تظهر على (A_1) ومتناسبة مع Q_1 أي V_1. معامل التناسب C_{j1} يسمى معامل التأثير بين (A_1) و (A_j) وهو دائما سالب .

عند اعتبار حالة التوازن (2) حيث نضع جميع النواقل عند الكمون $V_j = 0$ ماعدا الناقل (A_2) عند الكمون V_2 ، في هذه الحالة نحصل على :

$$Q_{12} = C_{12} V_2 \;،\; Q_{22} = C_{22} V_2 \;،\; Q_{32} = C_{32} V_2 \;،\; \ldots\ldots \; Q_{n2} = C_{n2} V_2$$

مطابقة جميع حالات التوازن تؤدي إلى حالة التوازن العامة :

$$Q_i = Q_{i1} + Q_{i2} + \cdots + Q_{ii} + \cdots + Q_{in}$$

ي :

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + C_{13} V_3 + \cdots + C_{1n} V_n$$

$$Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 + C_{23} V_3 + \cdots + C_{2n} V_n$$

$$\vdots$$

$$Q_n = C_{n1} V_1 + C_{n2} V_2 + C_{n3} V_3 + \cdots + C_{nn} V_n$$

العلاقات السابقة يمكن كتابتها في شكل مصفوفي :

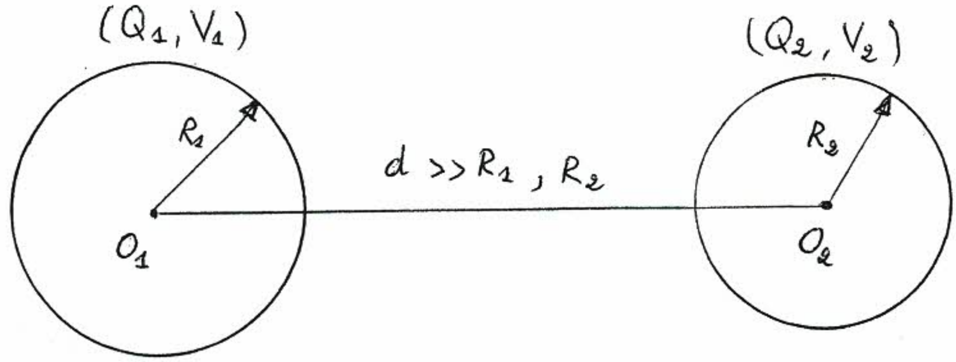
$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

معاملات الشحنة C_{ii} هي دائما موجبة. وكنتيجة لنظرية العناصر المتقابلة فإن جميع معاملات التأثير C_{ij} سالبة.
$(C_{ij} < 0$ و $C_{ii} > 0)$

وبسبب عدم التأثير الكلي بين النواقل، يمكن أن تذهب خطوط الحقل الكهربائي إلى ∞ وهذا يؤدي إلى أن : $Q_i \geqslant \left|\sum_{j \neq i} Q_{ij}\right|$
أو : $C_{ii} \geqslant \left|\sum_{j \neq i} C_{ij}\right|$. المساواة نحصل في حالة التأثير الكلي

بين النواقل . التأثير المتبادل بين الناقلين (A_i) و (A_j)
هو نفسه ولذلك فإن : $C_{ij} = C_{ji}$
والمصفوفة $[C_{ij}]$ هي إذن متناظرة.

مثال: معاملات السعة والتأثير بين ناقلين كرويين.
نعتبر ناقلان كرويان (A_1) و (A_2) نصف قطريهما R_1 و R_2 ويحملان الشحن Q_1 و Q_2 و يوجدان على مسافة d بين مركزيهما O_1 و O_2. نعتبر الحالة: $d >> R_1$ و $d >> R_2$.



$$V_1 = V_1(O_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{d} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_d}$$

$$V_2 = V_2(O_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{d} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_d}$$

حيث: $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ ، $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2$ و $C_d = 4\pi\varepsilon_0 d$

إذن لدينا:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{Q_1}{C_1} + \dfrac{Q_2}{C_d} \\ V_2 = \dfrac{Q_1}{C_d} + \dfrac{Q_2}{C_2} \end{cases} \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & 1/C_d \\ V_2 & 1/C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_d} \\ 1/C_d & \frac{1}{C_2} \end{vmatrix}}$$

$$Q_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} & V_1 \\ 1/C_d & V_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/C_1 & 1/C_d \\ 1/C_d & 1/C_2 \end{vmatrix}}$$

و عند حساب المحددات في عبارات Q_1 و Q_2 نجد:

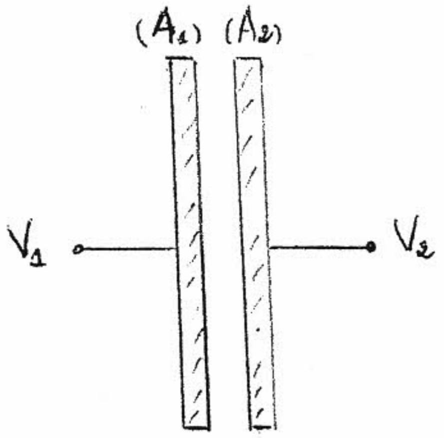
$$Q_1 = \frac{C_1 . C_d^2}{C_d^2 - C_1C_2}V_1 - \frac{C_1C_2C_d}{C_d^2 - C_1C_2}.V_2 \ , \ Q_2 = -\frac{C_1C_2C_d}{C_d^2 - C_1C_2}V_1 + \frac{C_2C_d^2}{C_d^2 - C_1C_2}.$$

ونستنتج: $C_{11} = \dfrac{C_1}{1 - C_1C_2/C_d^2}$ ، $C_{22} = \dfrac{C_2}{1 - C_1C_2/C_d^2}$ ، $C_{12} = C_{21} = \dfrac{-C_1C_2/C_d}{1 - C_1C_2/C_d^2}$

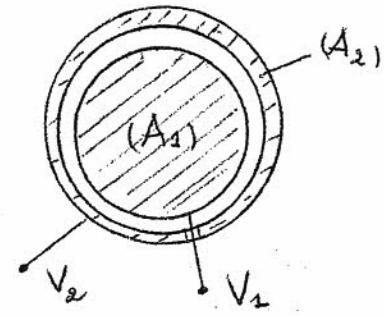
وبما أن: $C_d^2 > C_1C_2 \Leftarrow C_{11} > 0$ و $C_{22} > 0$ و $C_{21} = C_{12} < 0$.

8- المكثفة الكهربائية :

تعريف : نسمي مكثفة كل جملة مشكلة من ناقلين في حالة تأثير كهروساكن. يوجد نوعان من المكثفات : * ذات لبوسين قريبين * ذات تأثير كلي.



لبوسان قريبان



تأثير كلي.

على العموم اللبوسان مفصولان بعازل من أجل الزيادة في قيمة سعة المكثفة.

ليكن (A_1) و (A_2) ناقلان يحملان الشحنتين Q_1 و Q_2 وموضوعان تحت الكمون V_1 و V_2 على التوالي. من الفقرة السابقة لدينا:

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$$
$$Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2$$

المعاملات C_{ij} لا تتعلق بـ Q و V وإنما بشكل ووضعية الناقلين بالنسبة لبعضهما البعض. للحصول على عبارات C_{ij} يكفي أن نأخذ حالات خاصة وبسيطة. لنرى ما يحدث في حالة تأثير كلي بين الناقلين.

$$Q_2 = Q_2^{int} + Q_2^{ext} = Q_2^{ext} - Q_1$$

عندما نربط (A_2) بالأرض ($V_2 = 0$ و $Q_2^{ext} = 0$) نحصل إذن على:

$$Q_2 = -Q_1 \quad \text{أي :} \quad C_{11} = -C_{21}$$

العلاقة $Q_2 = -Q_1$ صحيحة فقط عندما نربط الناقل (A_2) بالأرض أما : $C_{11} = -C_{21}$ فهي صحيحة لجميع حالات التوازن.

في الحالة العامة لدينا :

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2$$

وبما أن $C_{12} = C_{21}$ و $C_{11} = -C_{21}$ $\Leftarrow$ $Q_1 = C_{11} (V_1 - V_2)$

إذن :

$$C_{11} = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} .$$

إصطلاحا، تعرف السعة الكهربائية C لمكثفة شحنتها Q

وفرق الجهد بين طرفيها $V = V_1 - V_2$ كما يلي: $C = C_{11}$ ، $V = V_1 - V_2$

و $Q = Q_1$ و هذا يؤدي إلى العلاقة: $Q = CV$ أي: $C = Q/V$.

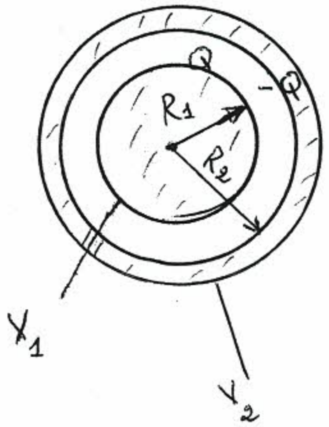
* ملاحظات: - تسمى هذه التركيبة مكثفة لأنها تسمح «بتكثيف الكهرباء» أي تكديس الشحن الكهربائية على سطحي الناقلين في المنطقة الموجودة بين اللبوسين وهكذا وبصناعة مكثفات ذات سعة عالية يمكن الحصول على شحن Q مرتفعة باستعمال جهد V غير عال.

- الشحنة Q_2 الموجودة على (A_2) هي: $Q_2 = Q_2^{ext} - Q_1$ في حالة التأثير الكلي. Q_2 لا تساوي $-Q_1$ إلا عندما يكون (A_2) موصول بالأرض ولكن تبقى Q_2^{ext} على العموم مهملة أمام Q_1.

- بالنسبة لمكثفة ذات لبوسين قريبين، نحصل على نفس النتائج السابقة عندما نأخذ المسافة بين اللبوسين صغيرة جدا أمام أبعاد الناقلين. في هذه الحالة Q_1 و Q_2 التي توافق الشحن الكلية للناقلين، يكون تكثيفها على السطحين المتقابلين بشكل أكبر كلما كانت المسافة بين الناقلين أصغر. وهذا يؤدي حالة قريبة جدا من مكثفة ذات تأثير كلي.

* سعة مكثفات بسيطة:

- المكثفة الكروية:

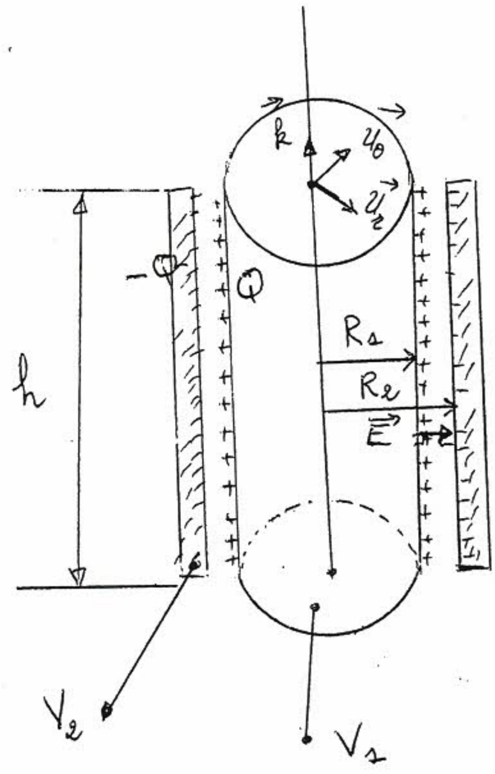


باستعمال نظرية غوس نحصل على الحقل $\vec{E}(r)$ بين R_1 و R_2: $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$

$dV = -\vec{E}.d\vec{r} \Rightarrow V = V_1 - V_2 = -\displaystyle\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\,d\vec{r}$

إذن: $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right]$ و $C = \dfrac{Q}{V} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

المكثفة الاسطوانية:



بين R_1 و R_2 ، $\vec{E}$ يخرج عمودي على سطح الناقل (A_1) و يدخل عمودي على سطح الناقل (A_2) . الاتجاه العمودي على هذين السطحين هو $\vec{u_r}$ و بما أن المسافة بينهما صغيرة فإن $\vec{E}$ يحافظ على الاتجاه $\vec{u_r}$ بين الناقلين و يمكن أن نكتب بين R_1 و R_2 : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$
يمكن أن نطبق نظرية غوس للحصول على $\vec{E}(r)$ و نجد: $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{2\pi r h}\,\vec{u_r}$

$$V = V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{2\pi r h}\cdot dr$$

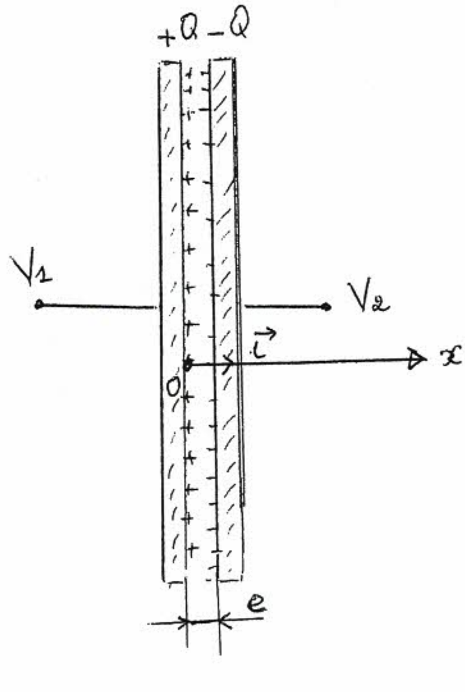
و نجد:

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2\pi h}\,\ln(R_2/R_1)$$

إذن سعة هذه المكثفة هي:

$$C = 2\pi\varepsilon_0\cdot h \,/\, \ln(R_2/R_1)$$

المكثفة المستوية:



$\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\vec{i}$ ، $dV = -E\,dx$

$$V = V_1 - V_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_e^0 dx = \frac{\sigma.}{\varepsilon_0}$$

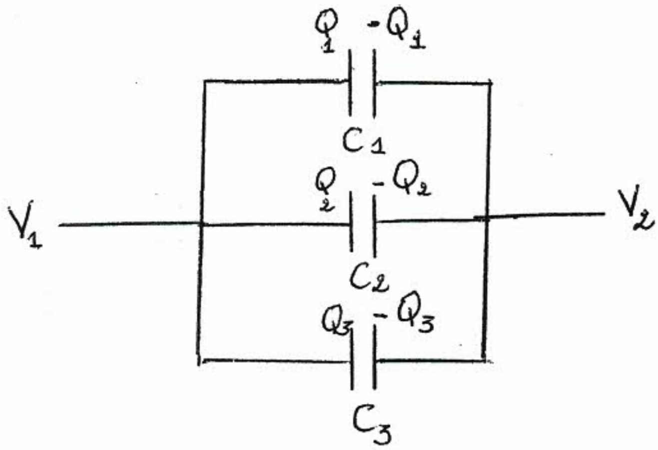
إذن كانت S هي مساحة اللبوسين:

$$Q = \sigma.S \Leftarrow V = \frac{Q.\,e}{\varepsilon_0 . S}$$

و نحصل على: $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{\varepsilon_0 . S}{e}$

جمع المكثفات :

* جمع المكثفات على التوازي :



$V = V_1 - V_2$

Q_1 شحنة C_1

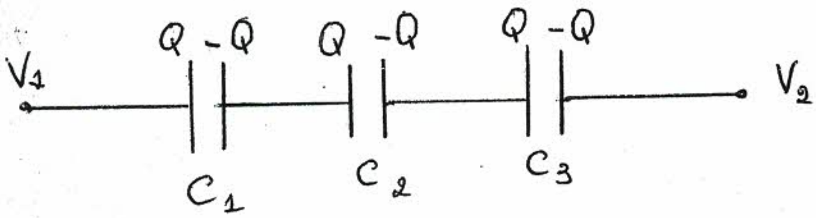
Q_2 شحنة C_2

Q_3 شحنة C_3

$$Q = \sum Q_i = \sum C_i \cdot V = C_{eq} \cdot V$$

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

* الجمع على التسلسل :



$$V = V_1 - V_1 = \sum V_i = \sum_i \frac{Q}{C_i} = Q \sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

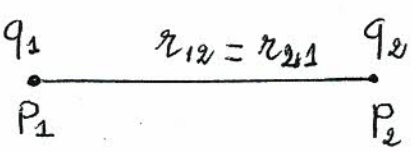
$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

الطاقة الكهرساكنة :

رأينا أن الطاقة الكهربائية الكامنة لشحنة q توجد داخل كمون V هي : $E_p = W_e = q \cdot V$

في حالة مجموعة من الشحن $\{q_i\}$ ، الطاقة الكهربائية للمجموعة تكتب :

* في حالة شحنتين :



$$W_e^1 = q_1 V(P_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{21}}$$

$$W_e = q_2 \cdot V(P_2) = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_{12}}$$

$$W_e = W_e^1 = W_e^2 = q_1 V(P_1) = q_2 V(P_2)$$

يمكن أن نكتب : $W_e = \frac{1}{2}\left(W_e^1 + W_e^2 \right)$

عندما نأخذ ثلاث شحن نقطية :

$$W_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_{23}}$$

نلاحظ أن كل زوج $\{q_i, q_j\}$ مربوط بطاقة كامنة واحدة
وبالنسبة لمجموعة من N شحنة يمكن أن نكتب :

$$W_e = \sum_{i=1}^{N} q_i V_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{i=1}^{N} q_i \cdot\left(\sum_{j>i}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}\right)$$

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

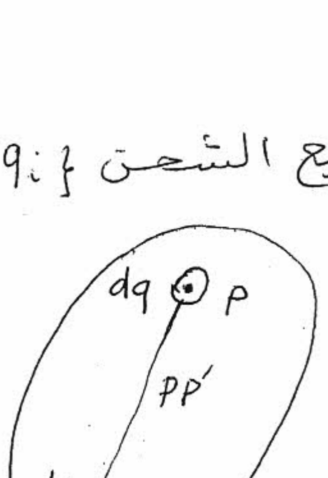
أو : $$W_e = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

المعامل $1/2$ في عبارة W_e النهائية يظهر بسبب حساب كل
زوج $q_i q_j$ مرتين في عملية الجمع. الطاقة الكهربائية الكامنة
لتوزيع مشكل من N شحنة نقطية هي :

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i(P_i)$$

مع : $$V(P_i) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$V(P_i)$ هو الكمون في النقطة P_i الناتج عن جميع الشحن $\{q_i\}$
ما عدا q_i التي توجد في P_i.



يمكن أن نعمم العبارة السابقة على توزيع شحني
مستمر. لتكن dq الشحنة العنصرية
المحيطة بنقطة كيفية P من التوزيع

الطاقة الكهربائية لهذا التوزيع هي:

$$W_e = \frac{1}{2}\int dq\, V(P)$$

حيث:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot \int_V \frac{dq\,(P')}{PP'}$$

V = حجم كل التوزيع الشحني و التكامل يجب أن يمر على كل التوزيع الشحني المستمر.

الطاقة الكهربائية لناقل كهربائي في حالة توازن هي إذن

$$W_e = \frac{1}{2}\int dq\; V(P) = \frac{V}{2}\int dq = \frac{Q.V}{2}$$

لأن الكمون الكهربائي لناقل كهربائي V في حالة توازن ثابت.

إذن:

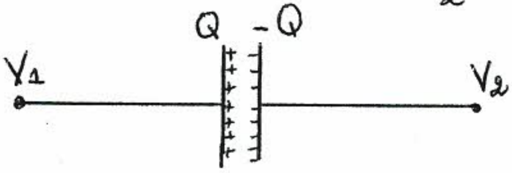
$$W_e = \frac{1}{2}Q.V = \frac{1}{2}C.V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

حيث C هي السعة الكهربائية للناقل و Q شحنة الناقل.

في حالة مجموعة من النواقل في حالة توازن (Q_i, V_i):

$$W_e = \frac{1}{2}\sum Q_i V_i$$

في حالة مكثفة كهربائية:



$V_1 > V_2$

$$W_e = \frac{1}{2}\left(Q_1 V_1 + Q_2 V_2\right) = \frac{1}{2}\left(Q V_1 - Q V_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}Q\,(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}Q.V$$

إذن:

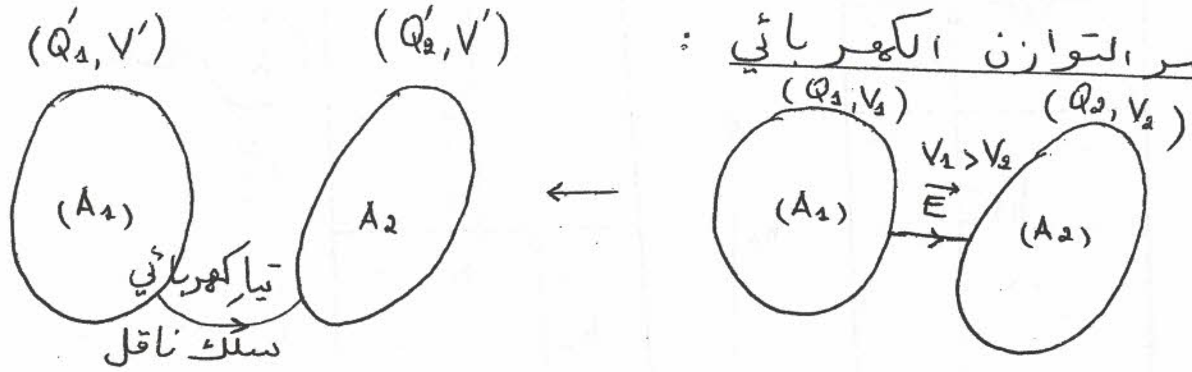
$$W_e = \frac{1}{2}.Q.V = \frac{1}{2}.C.V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

الفصل الرابع : الكهرباء المتحركة
(Electrocinétique)

I - الناقلية الكهربائية :

1 - مفاهيم عامة :

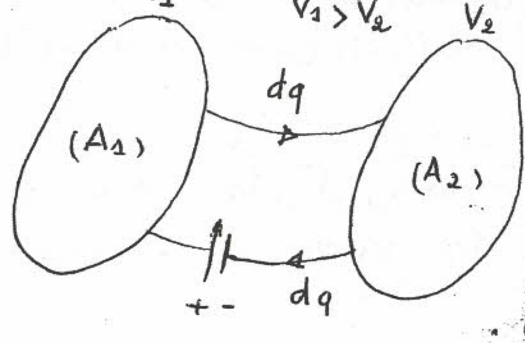
أ - كسر التوازن الكهربائي :



ليكن ناقلان كهربائيان (A_1) و (A_2) معزولان وفي حالة توازن . المجال الكهربائي معدوم داخل كل منهما . ولكن يوجد مجالا كهربائيا بينهما . عندما يكون $V_1 > V_2$ فإن $\vec{E}$ موجه من (A_1) نحو (A_2) .

نصل الناقلين بسلك ناقل ، فيحدث كسر للتوازن الكهربائي لأن (A_1) و (A_2) والسلك يشكلون معًا ناقلا وحدًا غير متساوي الكمون . في هذه الحالة يحدث إنتقال للشحن الحرة بين الناقلين عبر السلك إلى أن نحصل على حالة توازن جديدة . التيار بين الناقلين يتوقف عندما يصير الناقلان عند نفس الكمون V' والمجال الكهربائي بينهما $\vec{E} = \vec{0}$.

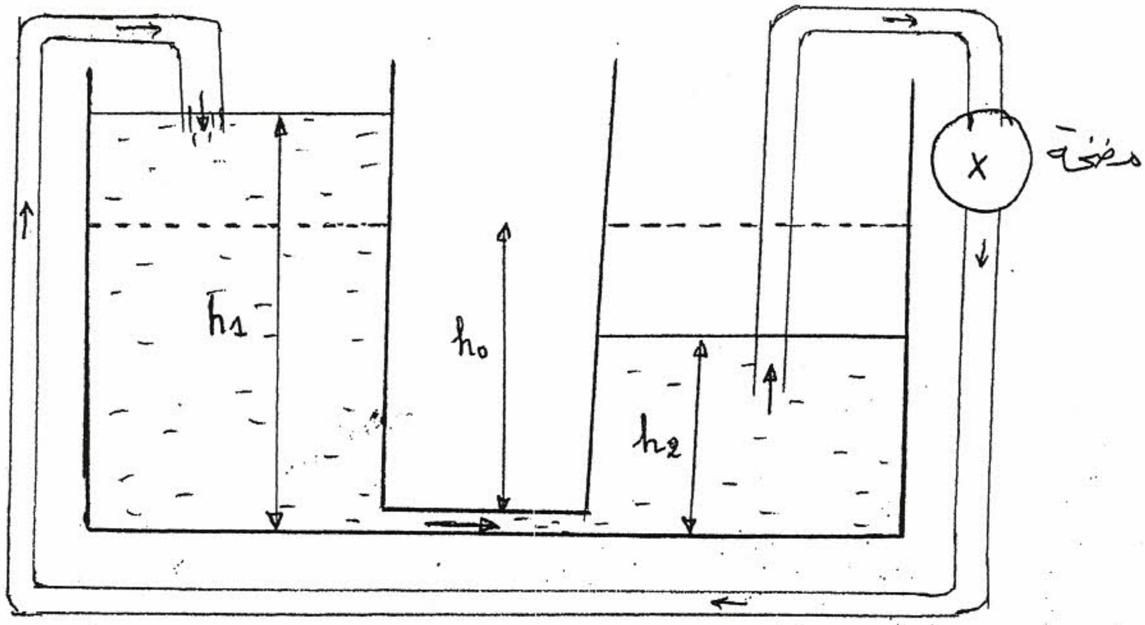
ب - التيار المستمر - الحقل الكهرمحرك ، القوة الكهرمحركة :



في المثال السابق ، عند وضع مولد كهربائي بين الناقلين (A_1) و (A_2) موصول بسلك ، نحصل على دارة مغلقة تجعل التدفق dq للشحن التي تنتقل من (A_1) إلى (A_2) مساو لتدفق الشحن من (A_2) إلى (A_1) .

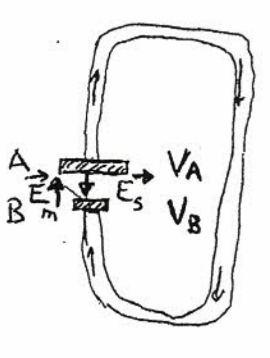
وهذا يمنع حدوث التوازن بين A_1 و (A_2) وتجعل مرور التيار الكهربائي بينهما دائم.

المولد يلعب نفس الدور لمضخة تعمل على المحافظة على عدم التوازن لمستوى الماء بين وعائين موصولين.



من دون مضخة ، الارتفاعين h_1 و h_2 يؤولان إلى نفس الارتفاع h_0 عند حالة التوازن ويتوقف تدفق الماء بين الوعائين ، كذلك من دون مولد كهربائي الكمونان V_1 و V_2 يؤولان إلى نفس الكمون V_0 .

دور المولد هو إذن ليس خلق شحن جديدة ، وإنما تحريك الشحن الحرة في دارة مغلقة بين الناقلين . الشحن الحرة التي تنتقل تحت تأثير المجال الكهربائي بين الكمونين V_1 و V_2 تعطي عملا $W = q\,(V_2 - V_1)$ وعلى المولد أن يرجع هذا العمل من أجل نقل الشحن الموجبة من الكمون المنخفض V_2 إلى الكمون الأكبر V_1 والعكس بالنسبة للشحن السالبة.



نعتبر مولد مع دارته الخارجية . المولد هو عبارة عن جهاز كهربائي يمكنه أن يخلق بين طرفيه فرق جهد $V_A - V_B$ دائم . $(V_A > V_B)$

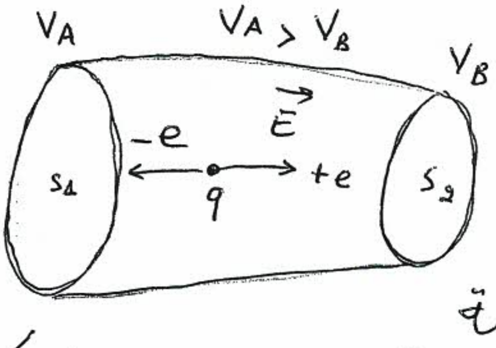
عندما يكون $V_A > V_B$ فإنه يوجد مجال كهرساكن $\vec{E}_s$ بين A و B.
$\vec{E}_s = -\vec{grad}\,V$. $\vec{E}_s$ موجه من A نحو B بحيث يعمل على تكديس الشحن الموجبة على B و الشحن السالبة على A.
لكي لا ينعدم $\vec{E}_s$ بين A و B وتتوقف عملية تكديس الشحن فوق A و B ، لا بد أن يوجد مجال آخر يسمى الحقل الكهرمحرك $\vec{E}_m$ معاكس لـ $\vec{E}_s$ يعمل على ذلك.
المجال الكهربائي بين A و B هو : $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_m$
القوة المطبقة على q هي إذن : $\vec{F} = q\vec{E} = q\vec{E}_s + q\vec{E}_m$
ليكن W العمل المتقدم من طرف شحنة q أثناء دورة كاملة داخل الدارة الكهربائية. عند إعتبار $\vec{E}_m$ معدوم خارج المولد فإن هذه الطاقة هي:

$$W = \oint \vec{F}\,\vec{dl} = \oint (q\vec{E}_s + q\vec{E}_m)\,\vec{dl} = q\left(\oint \vec{E}_s\,\vec{dl} + \int \vec{E}_m\,\vec{dl}\right)$$

$\oint \vec{E}_s\,\vec{dl} = 0$ لأن $\vec{E}_s$ مشتق من كمون ويبقى:

$$W = q\oint \vec{E}_m\,\vec{dl} = q\cdot\varepsilon \quad \left(\varepsilon = \oint \vec{E}_m\,\vec{dl}\right)$$

ε : هو مقدار له نفس الوحدة لفرق الجهد ويسمى القوة الكهرمحركة للمولد. المولد هو مصدر حركة الشحن داخل الدارة.



جـ - شدة التيار، كثافة التيار:

نأخذ ناقل في حالة حياد ونطبق بين طرفيه فرق جهد $V_A - V_B$.
المجال $\vec{E}$ داخل الناقل ثابت، الشحنة الموجبة تتحرك في إتجاه و الشحن السالبة في الإتجاه المعاكس
لقد تم الاصطلاح على تعريف شدة التيار الكهربائي كما يلي:

شدة التيار الكهربائي هي كمية الكهرباء ΔQ التي تمر عبر المقطع s أثناء الزمن Δt لما $\Delta t \to 0$.

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

على العموم يمكن أن تتغير شدة التيار مع الزمن وفي الفضاء بحيث تكون خاصة بلحظة معينة وموقع معين.

يكون التيار ثابتا (مستمر) عندما تكون شدته ثابتة مع الزمن. عندما يكون متغيرا، فإنه يمكن أن يتم ذلك بصفة مستمرة أو غير مستمرة. عندما يتغير بصفة مستمرة مع تغير إتجاهه فإنه يكون متناوبا. التغير يمكن أن يكون دوريا.

في حالة النظام المستمر، أي عندما يكون التيار ثابت، فإنه لا يمكن أن يحدث تكديس للشحن في أي نقطة من الدارة. فالتيار ثابت في كل نقاط الدارة وكذلك الكمون الكهربائي.

عندما يكون التيار ثابت فإن عدد الشحن n الناقلة للكهرباء داخل وحدة الحجم هو أيضا ثابت. كثافة الشحنة الحجمية ρ_m هي أيضا ثابتة:

$$\rho_m = n \cdot e$$

إذا كانت $\vec{v}$ هي سرعة إنتقال الشحن الناقلة للكهرباء، فإن الشحنة dQ التي تمر عبر المقطع s أثناء الزمن dt هي: $dQ = \rho_m \cdot s \cdot dl = \rho_m \cdot s \cdot v \cdot dt$ ، لأن $dl = v \cdot dt$

إذن:

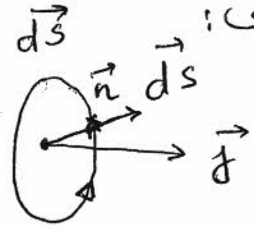
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\rho_m \cdot s \cdot v \cdot dt}{dt}$$

أي:

$$\boxed{I = n \cdot e \cdot v \cdot s}$$

في الحقيقة v تمثل السرعة المتوسطة للشحن الحرة.

إن التيار معرف باتجاه وشدة تتعلق بمساحة المقطع الذي يمر منه. ولهذا فقد تم إدخال مفهوم آخر للتيار هو كثافة التيار $\vec{j}$ بحيث تصبح شدة التيار هي عبارة عن تدفق $\vec{j}$ عبر المقطع s. كثافة التيار تعرف:



$$dI = \vec{j}\cdot\vec{ds} = \vec{j}\cdot\vec{n}\cdot ds$$

$$I = \iint_{(S)} \vec{j}\cdot\vec{ds}$$

$\vec{j}$ هو شعاع مماس لمسارات الشحن المتحركة ($\vec{j} \parallel \vec{v}$) والتي تسمى خطوط التيار وهو موجه وفق حركة الشحن الموجبة. طويلته هي:

$$j = \frac{dI}{ds} = \frac{dQ}{dt\, ds}$$

في حالة النظام المستمر:

$$j = \frac{d(\rho_m \cdot s \cdot v)}{ds} = \rho_m \cdot v$$

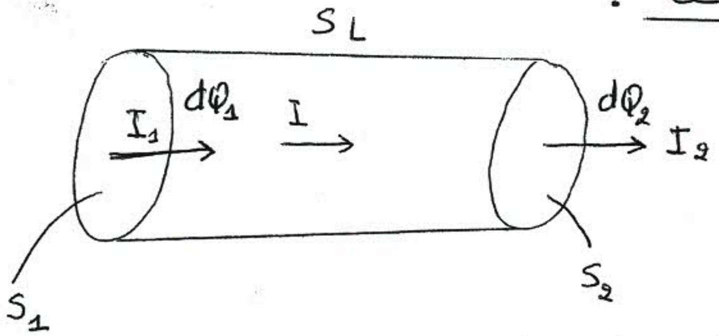
أو:

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{v}$$

إذن:

$$I = \iint_{(S)} dI = \iint_{(S)} \vec{j}\cdot\vec{ds}$$

* <u>تدفق $\vec{j}$ عبر مساحة مغلقة:</u>



ليكن سطح مغلق (S) من ناقل: $S = S_1 + S_2 + S_L$

في حالة النظام المستقر، فإن شدة التيار هي نفسها في أي موضع من الناقل ولا يوجد أي تكديس للشحن.

$$dQ_s = 0$$

$$dQ_s = dQ_1 - dQ_2 = I_1\, dt - I_2\, dt$$

$$= -\iint \vec{j_1}\, \vec{dS_1}\, dt - \iint \vec{j_2}\cdot\vec{dS_2}\, dt$$

...ن $d\vec{S_1}$ موجه نحو الخارج والتدفق عبر المساحة الجانبية S_L معدوم.

يمكن أن نكتب إذن:

$$dQ_s = -\left[\iint_{S_2} \vec{j_1}\cdot d\vec{S_1} + \iint \vec{j_2}\, d\vec{S_2} + \iint \vec{j}\cdot d\vec{S_L}\right]\cdot dt$$

$$dQ_s = -\oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{j}\cdot d\vec{S}\cdot dt$$

وباستعمال نظرية Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_{(\tau)} div\,\vec{j}\cdot d\tau = -\frac{dQ_s}{dt}$$

في حالة النظام المستقر: $dQ_s = 0$

ونكتب: $div\,\vec{j} = 0$

- في حالة النظام الغير مستقر الذي يحدث فيه تكديس للشحن:

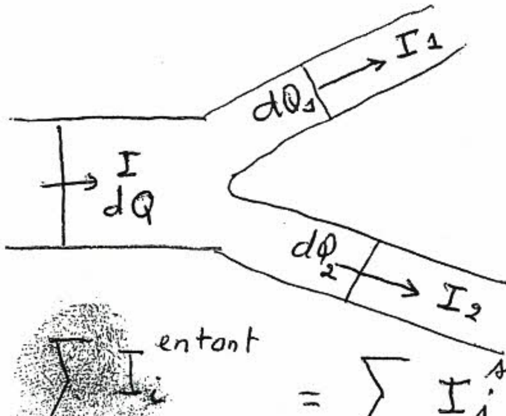
$$\frac{dQ_s}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{(\tau)} \rho_m\cdot d\tau$$

ونحصل على من ذلك على معادلة استمرارية الشحنة الكهربائية:

$$div\,\vec{j} + \frac{d\rho_m}{dt} = 0$$

- انحفاظ الشحنة الكهربائية (القانون الأول لكيرشوف):

ليكن تفرع ناقل (A) إلى ناقلين (A_1) و (A_2). في حالة النظام المستقر:



$$\sum_i I_i^{entrant} = \sum_j I_j^{sortant}$$

$$\left.\begin{array}{l} dQ = dQ_1 + dQ_2 \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_2}{dt} \\ I = I_1 + I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sum_i I_i\right) = \left(\right.$$

الداخلة

2- قانون أوم (Ohm) :

لقد درس أوم (Ohm) سلوك عدد من النواقل ولاحظ، عند تطبيق فرق جهد بين طرفي هذه النواقل، مرور تيار كهربائي يخضع للقانون:

$$V/I = cte = R > 0$$

R : تمثل مقاومة الناقل لمرور التيار الكهربائي.

إذن : $V = R . I$ مع : $[R] = \Omega$ (Ohm)

الدراسة المجهرية تبين أن الشحن الحرة أثناء حركتها تتعرض زيادة على قوة المجال الكهربائي $\vec{E}$، إلى قوة إحتكاك تشبه قوة إحتكاك الهواء ناتجة عن تأثير الذرات داخل الشبكة البلورية والإهتزاز الحراري:

$$\vec{F} = q\vec{E} - k.\vec{v}$$

$-k\vec{v}$: هي قوة الإحتكاك.

معادلة الحركة للشحن الحرة داخل ناقل هي :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + k\vec{v} = q\vec{E}$$

وحل هذه المعادلة هو: $\vec{v} = \frac{q}{k}.\left[1 - e^{-k/m \cdot t}\right].\vec{E}$

عندما نأخذ : $\vec{v}_0 = \vec{0}$: لما $t=0$.

بعد فترة من الزمن t، الجزء الأسي من عبارة $\vec{v}$ يؤول إلى الصفر وتصل السرعة إلى قيمة حدية $\vec{v_\ell}$: $\vec{v_\ell} = \frac{q}{k}.\vec{E}$

أو : $\vec{v_\ell} = \mu.\vec{E}$. μ تسمى حركية الشحن الحرة أو حوامل الشحنة، وكلما كانت كبيرة كان التيار الناتج مهما.

كثافة التيار $\vec{J}$ التي تعطى بالعلاقة : $\vec{J} = n.q.\vec{v_\ell} = nq\mu\vec{E}$

$$\vec{J} = n.\frac{q^2}{k}.\vec{E}$$

عادة نكتب : $\vec{J} = \sigma.\vec{E}$

حيث : $\sigma = n.q.\mu = n.\frac{q^2}{k}$

σ تسمى الناقلية الكهربائية وتأخذ بعين الاعتبار عدد الشحن الناقلة للكهرباء وحركية هذه الشحن. فكلما كانت كبيرة كان التيار مهمًا.

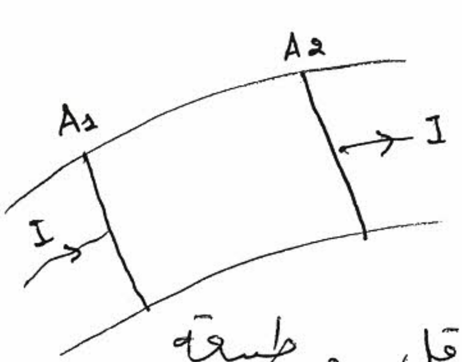
نسمي المقاومية ρ لمادة ، المقدار : $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{nq\mu} = \frac{k}{nq^2}$

وتمثل قدرة المادة على مقاومة مرور التيار الكهربائي.

قيم σ لبعض المواد :

عوازل	أنصاف نواقل	نواقل
	C : $2.8\ 10^{4}$	Cu : $5.81\ 10^{7}$
الزجاج : $10^{-14} - 10^{-10}$		Ag : $6.14\ 10^{7}$
الميكا (mica) : $10^{-15} - 10^{-11}$	Ge : $2.2\ 10^{-2}$	Fe : $1.53\ 10^{7}$
	Si : $1.6\ 10^{-3}$	Al : $3.54\ 10^{7}$

على المستوى العياني كل قطعة ناقل A_1A_2 يوجد تحت فرق جهد $V_1 - V_2$ ويمر به تيار I يتميز بمقاومة



$$R = \frac{V_1 - V_2}{I}$$

R لا يتعلق إلا بالشكل الهندسي للناقل وطبيعة حوامل الشحنة.

في حالة ناقل أسطواني طوله l ومقطعه s

$$R = \rho.\frac{l}{s}$$ أو $$G = \sigma.\frac{s}{l} \quad , \quad G = \frac{1}{R}$$

G : تسمى الناقلية (Conductance) . $[G] = (Siemens : S)$

عند ربط مقاومات على التسلسل لدينا :

$$R_{eq} = \sum R_i$$

أما على التفرع فلدينا : $G_{eq} = \sum G_i$, $\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i}$

في حالة نواقل ذات أشكال كيفية يمكن حساب المقاومة R باستعمال أحدى الطريقتين :

* التقسيم على التسلسل (I ثابت) : الناقل A_1A_2 يقسم إلى أسطوانات عنصرية مقطعها S وطولها dl .

في هذه الحالة :

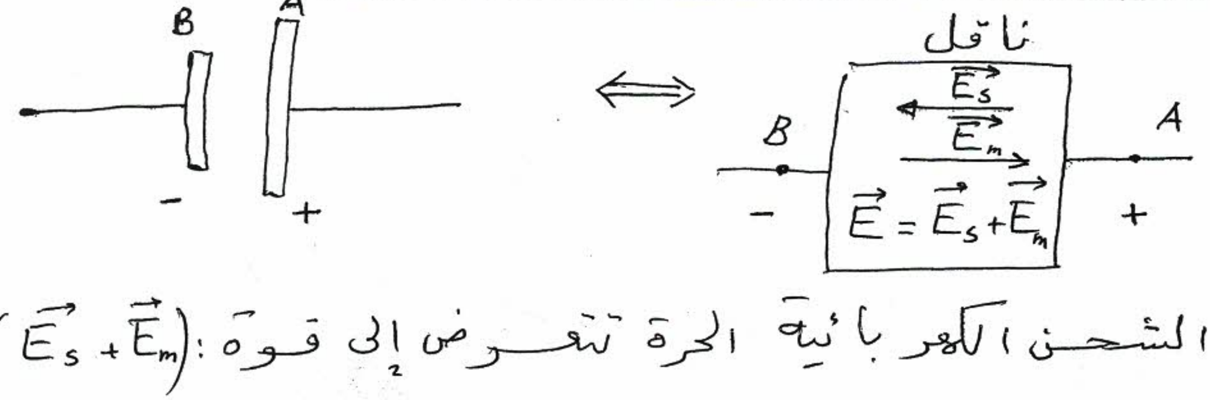
$$R = \int_{A_1}^{A_2} dR = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\rho \, dl}{S}$$

* التقسيم على التوازي (V ثابت) : الناقل A_1A_2 يقسم إلى اسطوانات عنصرية طولها l ومقطعها dS

في هذه الحالة :

$$\frac{1}{R} = G = \int_1^2 dG = \iint_1^2 \sigma . \frac{dS}{l}$$

* <u>قانون أوم في حالة مولد ومستقبل</u> :



الشحن الكهربائية الحرة تتعرض إلى قوة : $\vec{F} = q\,(\vec{E_s} + \vec{E_m})$

عند تكون الدارة مفتوحة أي $I=0$ لدينا : $\vec{F}=\vec{0}$

أي : $\vec{E}_s+\vec{E}_m=\vec{0}$ أي : $\vec{E}_s=-\vec{E}_m$

في هذه الحالة لدينا :

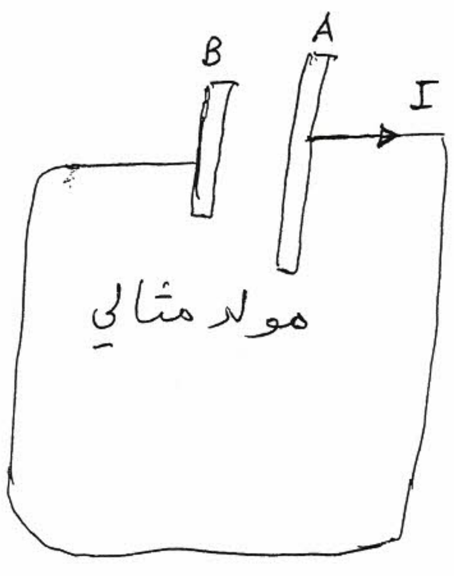
$$V_B-V_A=\int_B^A \vec{E}_s\cdot d\vec{l}=-\int_B^A \vec{E}_m\cdot d\vec{l}=-\mathcal{E}<0$$

لأن :

$$\mathcal{E}=\int_B^A \vec{E}_m d\vec{l}>0$$

$$V_B-V_A=-\mathcal{E}$$

في حالة مرور تيار كهربائي I (دارة مغلقة)



حوامل الشحن الكهربائية المسؤولة عن التيار الكهربائي تتعرض داخل المولد إلى قوة إضافية ناتجة عن الاحتكاك . بالنسبة لمولد مثالي هذه الاحتكاكات مهملة ونحصل على : $V_B-V_A=-\mathcal{E}$

أو ، $V_A-V_B=\mathcal{E}$

في حالة مولد غير مثالي يمكن أن نمثل الاحتكاك بمقاومة داخلية r . عند الانتقال بسرعة ثابتة $\vec{v}$ لدينا :

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{0}\right)\Leftarrow \vec{E}_s+\vec{E}_m-\frac{k}{q}\cdot\vec{v}=\vec{0}$$

و :

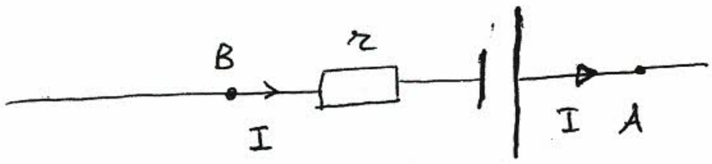
$$\int_B^A\left(\vec{E}_s+\vec{E}_m-\frac{k}{q}\vec{v}\right)\cdot d\vec{l}=0$$

أي :

$$V_B-V_A+\mathcal{E}=\int_B^A\frac{K}{q}\cdot\vec{v}\,d\vec{l}=\int_B^A\rho\cdot\vec{j}\,d\vec{l}$$

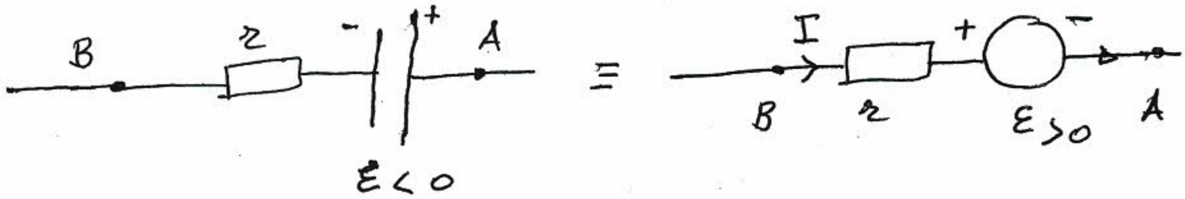
$$=r\cdot I$$

$$V_B - V_A = rI - \mathcal{E}$$



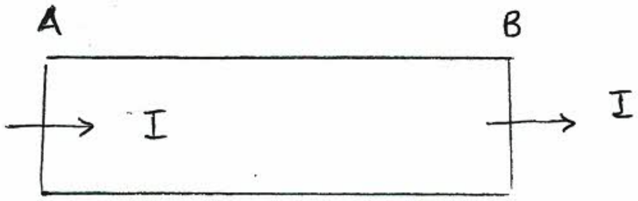
عندما $\mathcal{E} > 0$: فإن ذلك يوافق حالة مولد (منتج للطاقة الكهربائية).

عندما $\mathcal{E} < 0$: يمثل ذلك حالة مستقبل (مستهلك للطاقة الكهربائية). محرك يحول الطاقة الكهربائية إلى طاقة ميكانيكية يمثل مستقبل (Recepteur) بقوة كهربائية محركة $\mathcal{E}$ سالبة ونقول أيضا أنه يملك قوة كهربائية ضد محركة (f.c.é.m).



$$V_B - V_A = r \cdot I + \mathcal{E} \qquad (\mathcal{E} > 0)$$

3. الطاقة الكهربائية :



ليكن ناقل AB يمر به تيار كهربائي I تحت تأثير فرق في الجهد $V_A - V_B$.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

أثناء الزمن dt تدخل شحنة $dQ = I.dt$ من الطرف A وتخرج نفس الشحنة $dQ = I.dt$ من الطرف B .

و بما أن $V_A > V_B$ ، فإن الشحن عندما تصل إلى B تكون قد فقدت كمية من الطاقة :

$$dW = E_p(A) - E_p(B)$$

$$dW = dQ\,[V_A - V_B]$$

إذن :

$$dW = [V_A - V_B] \cdot I \cdot dt$$

أي الاستطاعة :

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_A - V_B) \cdot I$$

أو :

$$P = U \cdot I$$

حيث : $U = V_A - V_B$

في حالة مولد :

$$P = (V_B - V_A) \cdot I = (r I - \varepsilon) \cdot I = r I^2 - \varepsilon I$$

$$P = r I^2 - \varepsilon I$$

هذه الاستطاعة سالبة لأنها مقدمة من طرف المولد.
الطرف الأول $r I^2$ يمثل الطاقة الضائعة بمفعول جول ولهذا فهي موجبة ، والطرف الثاني السالب الاستطاعة الفعلية (Puissance nominale) للمولد :

$$\mathbb{P} = \varepsilon \cdot I$$

مردود المولد :

$$\eta = \frac{-P}{\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{P} - r I^2}{\mathbb{P}}$$

بالنسبة للمستقبل $(\varepsilon > 0)$:

$$P = r I^2 + \varepsilon I$$

و المردود :

$$\eta = \frac{\varepsilon I}{P} = \frac{P - r I^2}{P}$$

مغلقة يمر به تيار كهربائي I ومقاومته R وقوته الكهربائية المحركة ε ، قانون أوم العام يكتب :

$$V_A - V_B = R.I - \varepsilon$$

هذه العبارة مقبولة فقط عند يمر التيار من A إلى B .

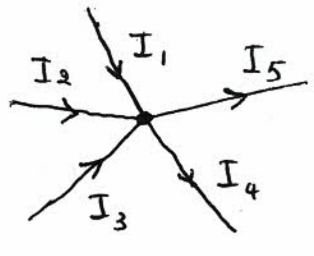
- يمكن مترجمة R بالمقاومة الكلية الموجودة بين A و B (أي مجموع المقاومات والمقاومات الداخلية للمولدات) و ε بالقوة الكهربائية المحركة الكلية (أي المجموع الجبري لجميع f.é.m)

- مفعول جول يعمل على تعميق فرق بين A و B ، بينما القوات الكهربائية (f.é.m) تعمل عكس ذلك .

عند ما يكون ε>0 فهذا يعني أن ثنائي القطب الموافق يعمل على تخفيض الجهد وتكون ε في هذه الحالة عبارة عن f.c.é.m فهي إذن صادرة إما عن محرك (مستقبل مثالي) أو مولد إستقطابه معاكس لاستقطاب المولد الرئيسي المسؤول عن مرور التيار بين A و B .

٢ - قوانين الانحفاظ في دارة كهربائية (قوانين كيرشوف) :

أ - قانون انحفاظ التيار الكهربائي (قانون العقد) :



لتكن عقدة كيفية :

$$\sum_{\text{الداخلة}} I_i = \sum_{\text{الخارجة}} I_j$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

مغلقة يمر به تيار كهربائي I ومقاومته R وقوته الكهربائية المحركة ε ، قانون أوم العام يكتب :

$$V_A - V_B = R.I - \varepsilon$$

هذه العبارة مقبولة فقط عند يمر التيار من A إلى B .

يمكن مترجمة R بالمقاومة الكلية الموجودة بين A و B (أي مجموع المقاومات والمقاومات الداخلية للمولدات) و ε بالقوة الكهربائية المحركة الكلية (أي المجموع الجبري لجميع f.é.m)

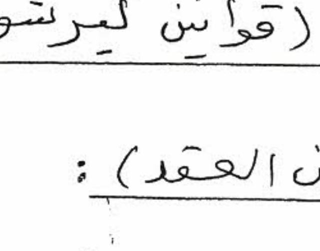
مفعول جول يعمل على تعميق فرق بين A و B ، بينما القوات الكهربائية (f.é.m) تعمل عكس ذلك .

عند ما يكون $\varepsilon > 0$ فهذا يعني أن ثنائي القطب الموافق يعمل على تخفيض الجهد وتكون ε في هذه الحالة عبارة عن f.c.é.m فهي إذن صادرة إما عن محرك (مستقبل مثالي) أو مولد استقطابه معاكس لاستقطاب المولد الرئيسي المسؤول عن مرور التيار بين A و B .

2- قوانين الانحفاظ في دارة كهربائية (قوانين كيرشوف) :

أ- قانون انحفاظ التيار الكهربائي (قانون العقد) :

لتكن عقدة كيفية :



$$\sum_{\text{الداخلة}} I_i = \sum_{\text{الخارجة}} I_j$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

ب - قانون انحفاظ الطاقة الكهربائية (قانون العروات):

لتكن عروة من دارة كهربائية مشكلة من n فرع ،
معادلة الفروع للفرع k تكتب :

$$U_k = R_k I_k - \mathcal{E}_k$$

قانون أوم العام الخاص بالفرع k.

حيث : R_k هي المقاومة الكلية للفرع k و $\mathcal{E}_k$ هي f.é.m الكلية للفرع k و I_k هو التيار الذي يمر في الفرع k
و U_k هو فوق الجهد بين طرفي الفرع .

إنحفاظ الطاقة الكهربائية لهذه العروة يعبر عنه بالإنطلاق من العقدة 1 والرجوع إليها مرورًا بجميع الفروع (أي العقد) التي توجد داخل العروة . أي :

$$V_1 - V_1 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \cdots + (V_n - V_1)$$

$$0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

قانون العروات أو معادلة العروة يكتب إذن :

$$\sum_k R_k . I_k - \mathcal{E}_k = 0$$

الجمع على k يتم على جميع الفروع الموجودة في العروة .

ح ـ الحل العملي لمعادلات الكهرباء المتحركة :

في الكهرباء المتحركة ، نبحث عادة على حساب I_k تيار كهربائي ، كل واحد خاص بفرع من فروع الدارة الكهربائية.

بسبب قوانين الانحفاظ ، دارة تحتوي n فرع لا تملك n تيار I_k مستقل. عدد المجاهيل الحقيقي :

$$M = B - N + 1$$

حيث : B = عدد الفروع و N = عدد العقد .

لحل المشكلة يمكن أن نتبع الخطوات التالية :

1 ـ إختيار M عروة مستقلة أي تملك على الأقل فرع غير مشترك مع عروة أخرى .

2 ـ فوق كل عروة ، أختار إتجاه كيفي للتيار I_m (تيار العروة)

3 ـ أكتب M معادلة عروة $\sum_{k=1}^{n} R_k I_m - \mathcal{E}_k = 0$ باتباع إتجاه التيار المختار I_m مع مراعاة الإستقطاب لكل قوة كهربائية محركة . $\mathcal{E}_k$ تتعلق بالاستقطاب الذي نجده عند تتبع التيار ، فعندما نجد القطب + ، نضع + $(R_k I_m + \mathcal{E}_k)$

وعندما نجد القطب ـ ، نضع ـ $(R_k . I_m - \mathcal{E}_k)$

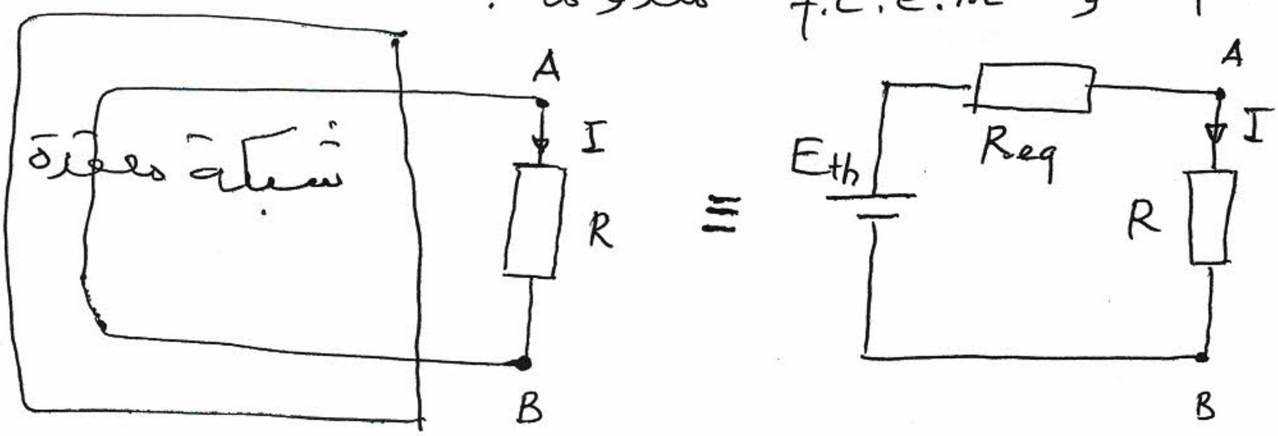
ونحصل بذلك على M معادلة لـ M مجهول . بعد الحساب ، عند ما نجد I_m موجب فهذا يعني أن إتجاه التيار صحيح وإذا كان I_m سالبا نغير إتجاهه.

عند وجود مستقبل في الفرع الذي يكون فيه $I_m < 0$ ، لابد من إعادة استقطاب المستقبل وحل المشكلة من جديد .

3- نظرية تيفنان (Thévenin) :

كل شبكة كهربائية خطية بين نقطتين A و B ومهما كانت معقدة فهي توافق مولد وحيد قيمة قوته المحركة $E = E_{th}$ ومقاومته الداخلية $r = R_{eq}$ حيث :

E_{th} = فرق الجهد المقاس بين A و B باستعمال جهاز فولطمتر و R_{eq} = المقاومة بين A و B عندما نقصر جميع المولدات والمستقبلات الموجودة في الشبكة أي عندما نعتبر كل f.é.m و f.c.é.m معدومة.

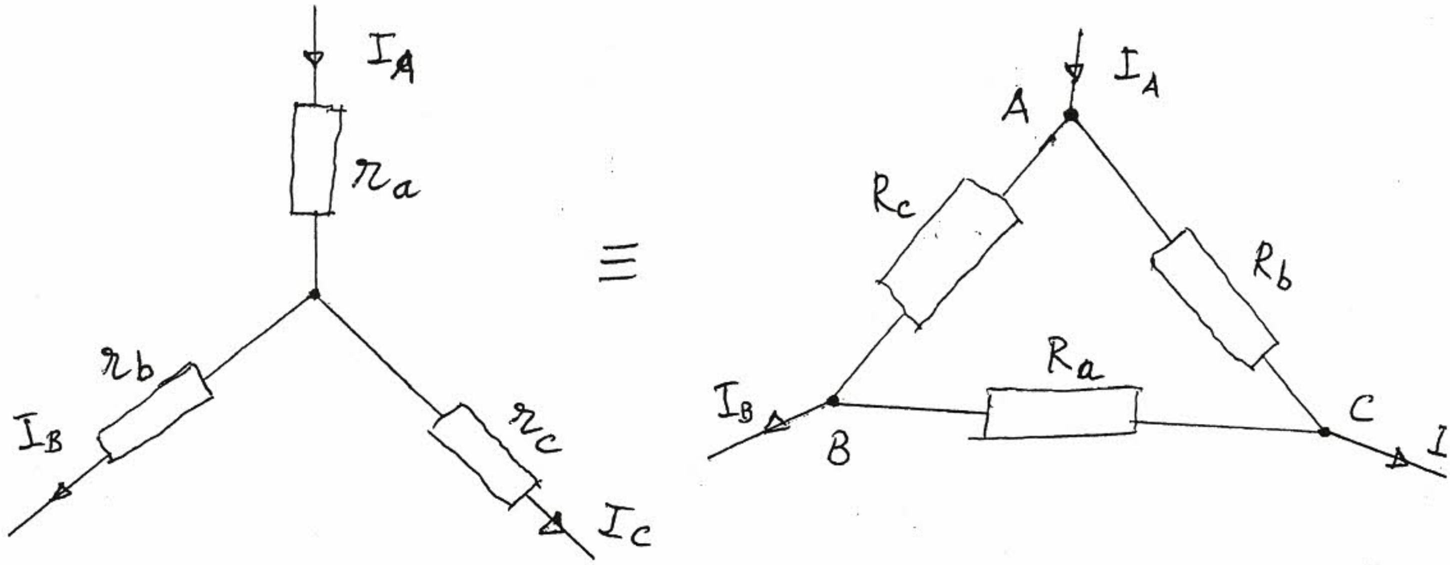


$$\boxed{I = \frac{E_{th}}{R + R_{eq}}}$$

ملاحظة : $E_{th} = V_A - V_B$ عند نزع المقاومة R

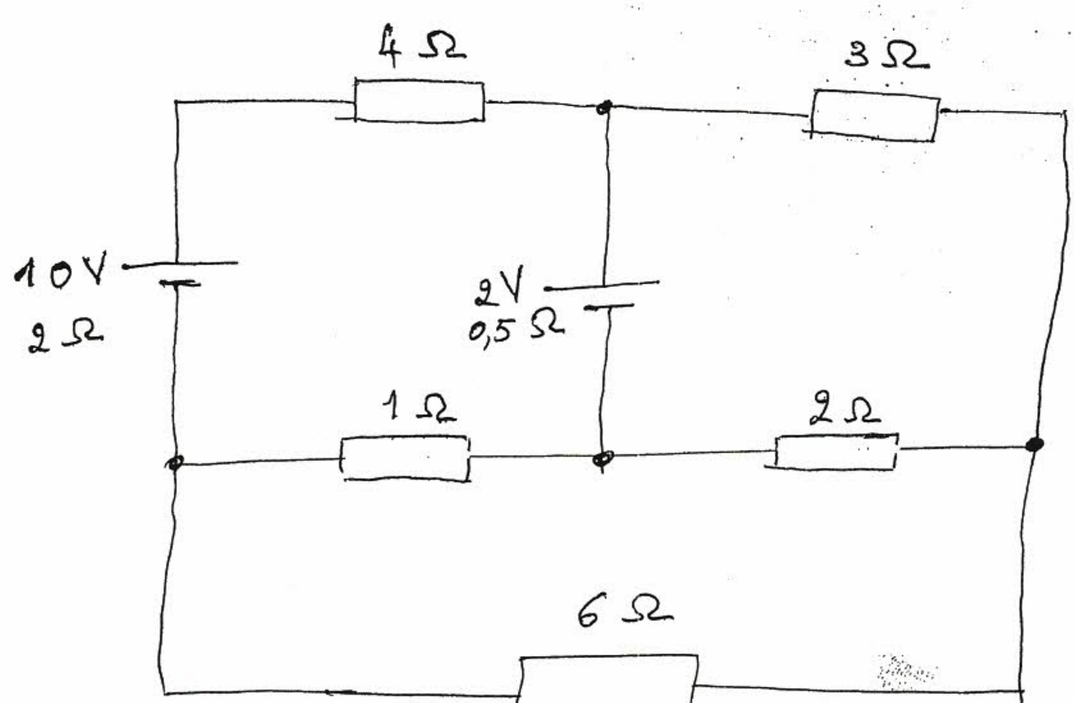
R_{eq} = هي المقاومة المكافئة بين A و B للشبكة المعقدة.

- التحويل مثلث - نجمة للمقاومات الكهربائية:



لما :
$$r_a = \frac{R_b \cdot R_c}{R_A + R_b + R_c} \quad , \quad r_b = \frac{R_a R_c}{R_A + R_b + R_c} \quad , \quad r_c = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

تطبيق:



أحسب التيار في كل فرع.